Informatique fondamentale cycle B

Recherche opérationnelle et aide à la décision

GRAPHES: PROBLEMES D'AFFECTATIONS

Georges KERYVEL

SOMMAIRE

- DEFINITION
- FORMALISATION
- METHODE DE RESOLUTION
- CAS PARTICULIER

AFFECTATION: DEFINITION

PRESENTATION

- n personnes se voient proposé n postes.
- Chacune classe ces postes en fonction de ses préférences, en notant avec une note de 0 à 20.
- Comment affecter une personne à un poste de façon à obtenir la satisfaction globale maximale.

- Problème combinatoire
  - n! solutions
  - n=5; 5!= 120 possibilités; n=6 ; 6!= 720 possibilités
  - n=20; 20!= 2.4 10^{18} possibilités
  - Si 100ns/solution 7714 ans

AFFECTATION: DEFINITION

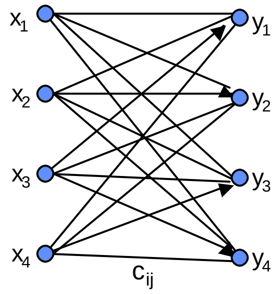
DEFINITION

- Soit un graphe complet biparti G=(X,Y,U)
  U=X*Y, |X|=|Y|=n
- Problème:
  - trouver dans ce graphe un couplage de valeur optimale (bijection X-->Y)
  - $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$
  - $C=(c_{ij})$ i=(1,..,n); j(1,…,n) "coût" de l'arc (i,j)
  - x_{ij} =1 si x_i est affecté à y_j
  - x_{ij} =0 si x_i n'est pas affecté à y_j
  - Nombre de solutions n!

AFFECTATION: DEFINITION

- **FORMALISATION**
  - Le programme à résoudre est:

$$\begin{cases} x_{ij} \in \{0,1\} & \forall i \in [1,..,n]; \quad \forall j \in [1,..,n] \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & \forall j \in [1,..,n] \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & \forall i \in [1,..,n] \\ z = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \end{cases}$$



METHODE DE RESOLUTION

- **METHODE**
  - Hongroise(1954)
    - rechercher un support minimal d'un graphe simple
    - Adaptée au problème de grande taille
      - sinon méthode PSEP plus simple.
- **EXEMPLE**
  - Soit un atelier
    - cinq postes {a, b, c, d, e} à affecter à cinq personnes {A, B, C, D, E}
    - Table de préférences, c_{ij}, pour chaque poste
    - Touver la meilleure affectation qui donne la satisfaction globale maximale.

METHODE DE RESOLUTION: LEMME 1

- **Lemme 1**
  - Il revient au même de calculer le max de la fonction économique ou le min des regrets.
  - En appelant c'_{ij} le "regret" des coefficients du tableau, la fonction économique s'écrit::

$$\mathrm{Max}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \min\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij} \quad \forall i,j \in [1,..,n]$$

Le "regret" , c'_{ij} , des coefficients du tableau s'écrit:
$c'_{ij} = \max_{i,j}(c_{ij}) - c_{ij}$ $\forall i=(1,..,n)$ $\forall j=(1,..,n)$

METHODE DE RESOLUTION: LEMME 1

- **Démonstration:**

$$\mathrm{Max}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \min\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathrm{Max}(c_{ij}) - c_{ij}\right]x_{ij}$$

Ecrivons $\mathrm{Max}(c_{ij})_{i,j} = v_M$

$$\mathrm{Max}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \min\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[v_M - c_{ij}\right]x_{ij}$$

$$\mathrm{Max}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_M x_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_M x_{ij} = v_M\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = K$$

$$\mathrm{Max}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \min\left\{K - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right\}$$

METHODE DE RESOLUTION: LEMME 2

- **Lemme 2:**
  - on ne change pas l'ensemble de solution d'un problème d'affectation si l'on ajoute ou retranche un même nombre à tous les éléments d'une même rangée, ligne ou colonne, du tableau.
  - Démonstration:
    - Soit P le problème initial et P' le problème obtenu en retranchant des valeurs u_i (i=1,..,n) et v_j (j=1,..,n) à chaque ligne, i, et colonne, j, respectivement.
    - P'=min p'

METHODE DE RESOLUTION: LEMME 1

- Nous avons:

  $c'_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$

$$p' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij} \quad \forall i = [1,..,n] \quad \forall j = [1,..,n]$$

$$p' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(c_{ij} - u_i - v_j\right)x_{ij}$$

$$p' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij}$$

$$p' = p - \sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{j=1}^{n} v_j$$

$$\min p' = \min\left(p - CST\right)$$

METHODE DE RESOLUTION

- PRINCIPE
  - remarque:
    - S'il existe un zéro par ligne et par colonne , nous obtenons une affectation optimale.
  - Obtention des zéros dans la matrice d'affectation
    - 1- Chercher une borne inférieure des affectations possibles, puis tenter de créer une affectation de valeur égale à cette borne.

      S'il n'en existe pas on augmentera cette borne jusqu'à trouver une affectation meilleure

METHODE DE RESOLUTION

- RECHERCHE DE LA BORNE INFERIEURE INITIALE
  - Construisons un ensemble de potentiel

    $u^0_i = \min_j (c_{ij}) \qquad \forall i = [1,..,n]$

    $v^0_j = \min_i (c_{ij}) \qquad \forall j = [1,..,n]$

    retranchons u^0_i de chaque ligne i

    retranchons v^0_j de chaque colonne j

  On obtient ainsi la borne inférieure,p , de l'affectation:

$$s_0 = \sum_{i=1}^{n} u_i^0 + \sum_{j=1}^{n} v_j^0$$

$$p = p_0 + s_0$$

Si maximisation : $p_0 = nv_M$

Si minimisation : $p_0 = 0$

METHODE DE RESOLUTION

Exemple:

tableau représentant les coefficients de préférence des différentes personnes.

	A	B	C	D	E
a	9	6	7	3	4
b	2	1	9	1	8
c	4	3	2	2	7
d	9	1	8	8	3
e	1	7	8	9	5

METHODE DE RESOLUTION

Recherche des zéros en lignes et colonnes.

Recherche des zéros en colonnes : $c^{(1)}_{ij}=c'_{ij}$ -$\min_j(c'_{ij})$

$v^0=\{0,2,0,0,1\}$; $\sigma^{(1)}_0=3$

	A	B	C	D	E
a	0	3	2	6	5
b	7	8	0	8	1
c	5	6	7	7	2
d	0	8	1	1	6
e	8	2	1	0	4
v_i	*0*	*2*	*0*	*0*	*1*

	A	B	C	D	E
a	0	1	2	6	4
b	7	6	0	8	0
c	5	4	7	7	1
d	0	6	1	1	5
e	8	0	1	0	3

METHODE DE RESOLUTION

Recherchons maintenant des zéros en lignes : $c^{(2)}_{ij}=c^{(1)}_{ij} - \min_j(c^{(1)}_{ij})$

$u0=\{0,0,1,0,0\}$; $\sigma^{(2)}_0=1$

$\sigma_0= \sigma^{(1)}_0+ \sigma^{(2)}_0=3+1=4$

	A	B	C	D	E	u^0_i
a	0	1	2	6	4	*0*
b	7	6	0	8	0	*0*
c	5	4	7	7	1	*1*
d	0	6	1	1	5	*0*
e	8	0	1	0	3	*0*

	A	B	C	D	E
a	0	1	2	6	4
b	7	6	0	8	0
c	4	3	6	6	0
d	0	6	1	1	5
e	8	0	1	0	3

METHODE DE RESOLUTION

Nous obtenons une solution ayant au moins un zéro par ligne et par colonne dont le coût est: $\sigma^0=4$.

	A	B	C	D	E
a	0	1	2	6	4
b	7	6	0	8	0
c	4	3	6	6	0
d	0	6	1	1	5
e	8	0	1	0	3

METHODE DE RESOLUTION

- **RECHERCHE DU COUPLAGE COMPLET**
  - Avec les zéros de la matrice, s_1, comprenant les $c^{(2)}_{ij}$, on cherche à former une solution de valeur 0, cad une affectation où tous $c^{(2)}_{ij}$ de la solution sont nuls.
  - Si cela est possible on a obtenu une solution optimale.

METHODE DE RESOLUTION

- Algorithme d'affectation des zéros.
  - Considérer les lignes ayant le nombre minimum de zéro (lignes a, c, d, dans notre exemple comportent un zéro)
  - 1-Choisir la ligne ayant un nombre minimum de zéros, affecter le zéro à la liaison correspondante.Le zéro est dit encadré.

    ex:Ligne, a, et affectons le zéro correspondant à la liaison aA, zéro (aA) encadré.
  - 2-Du fait ce choix, il n'est plus possible d'utiliser le(s) zéro(s), s'il en existe, de la colonne ou de la ligne correspondant à ce zéro encadré nous dirons que ce(s) zéro(s) est(sont barré(s).   ex: zéro (dA).
  - Retour en 1 tant qu'il existe des zéros non encadrés ou non barrés.

METHODE DE RESOLUTION

Exemple: Recherche du couplage complet du graphe, affectation des zéros

	A	B	C	D	E
a	$\boxed{0}$	1	2	6	4
b	7	6	**0**	8	**0**
c	4	3	6	6	**0**
d	~~**0**~~	6	1	1	5
e	8	**0**	1	**0**	3

	A	B	C	D	E
a	$\boxed{0}$	1	2	6	4
b	7	6	0	8	~~0~~
c	4	3	6	6	$\boxed{0}$
d	~~0~~	6	1	1	5
e	8	0	1	0	3

1 → 2

METHODE DE RESOLUTION

Exemple: Recherche du couplage complet du graphe, affectation des zéros. La matrice (4) représente la meilleure affectation obtenue en appliquant l'algorithme.

	A	B	C	D	E
a	$\boxed{0}$	1	2	6	4
b	7	6	$\boxed{0}$	8	~~0~~
c	4	3	6	6	$\boxed{0}$
d	~~0~~	6	1	1	5
e	8	**0**	1	**0**	3

	A	B	C	D	E
a	$\boxed{0}$	1	2	6	4
b	7	6	$\boxed{0}$	8	~~0~~
c	4	3	6	6	$\boxed{0}$
d	~~0~~	6	1	1	5
e	8	$\boxed{0}$	1	~~0~~	3

3 → 4

METHODE DE RESOLUTION

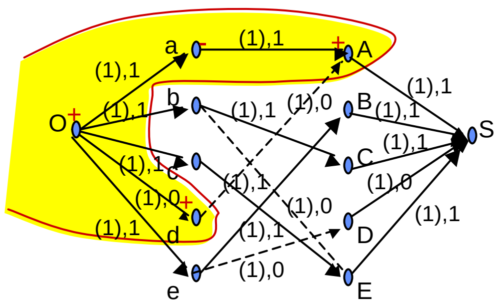
- **RECHERCHE DU COUPLAGE MAXIMUM**
  - Vérifier si le couplage sur le graphe est maximum (a-t-on affecté le maximum possible de zéro?).
  - Transformation du tableau d'affectation en réseau de transport. Puis Algorithme de Ford-Fulkerson
  - Réseau de transport:
    - Source O, capacité des arcs (O,i)=1
    - Puits S, capacité des arcs (j,S)=1
    - Capacité des arcs (i,j)= 1
    - Il existe un arc (i,j) s'il existe un zéro correspondant dans le tableau.

METHODE DE RESOLUTION

- **RECHERCHE DU COUPLAGE MAXIMUM**
  - Algorithme de Ford-Fulkerson
    - Les zéros encadrés correspondent aux arcs saturés ce qui fournit un flot complet.
    - On applique la procédure de marquage de l'algorithme de FF. Puis éventuellement la procédure d'amélioration du flot si la sortie est marquée.
    - Si la sortie ne peut être marquée nous avons affecté le maximum possible de zéros du tableau.
    - Nous avons l'affectation optimale au coût correspondant à σ_0.

METHODE DE RESOLUTION

EXEMPLE



1-le flot est complet, les arcs saturés correspondent aux zéros encadrés

2-Le flot est maximum, pas de marquage de la sortie.

Nous avons affecté le maximum possible de zéros.

Nous ne sommes pas à l'optimum, il manque une affectation.

METHODE DE RESOLUTION

OBTENTION DU SUPPORT MINIMAL

- Définition d'un support: *On appelle support du graphe G=(X,Y,G) tout sous ensemble S Ì (X È Y) tel que tout arc (x_i,y_j) ait au moins une extrémité dans S*.
  - Support S_0 est mini si $|S_0|$ est mini.
- Recherche du support minimal:
  - 1- Marquer toute ligne n'ayant pas de zéro encadré.
  - 2- Marquer toute colonne ayant un zéro barré sur une ligne marquée.
  - 3- Marquer toute ligne ayant un zéro encadré sur une colonne marquée.
  - 4- Répéter les opérations 2-3 tant que possible

➡ On obtient ainsi le support minimal du graphe simple construit avec les $c^{(2)}_{ij}$ nuls.

METHODE DE RESOLUTION

Exemple: recherche du support mini, le support est formé des sommets marqués

	A	B	C	D	E	
a	$\boxed{0}$	1	2	6	4	(3)
b	7	6	$\boxed{0}$	8	$\cancel{0}$	
c	4	3	6	6	$\boxed{0}$	
d	$\cancel{0}$	6	1	1	5	(1)
e	8	$\boxed{0}$	1	$\cancel{0}$	3	
	(2)					

METHODE DE RESOLUTION

- **MARQUAGE DU SUPPORT MINIMAL**
  - 1- Rayer les lignes non marquées et les colonnes marquées.
  - Nous obtenons la sous matrice formée des éléments, $c^{(2)}_{ij}$ non rayés par une verticale ou une horizontale.
  - Cette méthode permet de distinguer les sommets marqués des sommets non marqués par la procédure de F.F.

METHODE DE RESOLUTION

Exemple: Marquage du support minimal, rayer les lignes marquées et les colonnes marquées

Les lignes et colonnes marquées correspondent aux sommets marqués par l'algorithme FF.

	A	B	C	D	E	
a	$\boxed{0}$	1	2	6	4	(3)
d	$\cancel{0}$	6	1	1	5	(1)
b	7	6	$\boxed{0}$	8	$\cancel{0}$	
c	4	3	6	6	$\boxed{0}$	
e	8	$\boxed{0}$	1	$\cancel{0}$	3	
	(2)					

METHODE DE RESOLUTION

- **DEPLACEMENT DE ZEROS**
  - Considérons cette sous-matrice $[c^{(2)}_{ij}]$.
    - 1- Choisir le plus petit $c^{(2)}_{ij}$.
    - 2- Soustraire ce nombre, $\min(c^{(2)}_{ij})$, des coefficients des colonnes non rayées et l'ajouter aux coefficients des lignes rayées.(equi. soustraire $\min(c^{(2)}_{ij})$, des éléments non rayés et l'ajouter à ceux rayés deux fois)
    - 3-Nous obtenons une sous-matrice contenant de nouveaux zéro qu'il est possible d'affecter
    - 4-Si l'affectation n'est pas complète retour en début d'algorithme.
    - Coût de l'opération

$n_j = \text{nb colonnes non rayées}; n_i = \text{nb lignes rayées}$

$s_z = n_j \min\left(c^{(2)}_{ij}\right) - n_i \min\left(c^{(2)}_{ij}\right)$

METHODE DE RESOLUTION

Exemple: Déplacements des zéros.

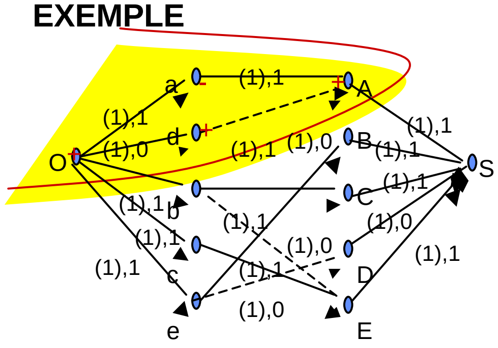
Les lignes marquées et et colonnes non marquées correspondent aux sommets entre lesquels nous voulons faire passer un flot au moindre coût. Nous retranchons le c_{ij} min des c_{ij} pour faire apparaître d'autres zéro. (σ_z=2-1=1)

	A	B	C	D	E	
a	**[0]**	1	2	6	4	(3)
d	~~0~~	6	1	1	5	(1)
b	7	6	**[0]**	8	~~0~~	
c	4	3	6	6	**[0]**	
e	8	**[0]**	1	~~0~~	3	
	(2)					

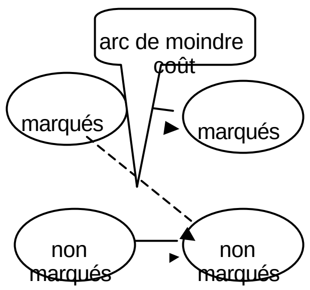
	A	B	C	D	E
a	**0**	0	1	5	3
d	0	5	0	0	4
b	8	6	**0**	8	0
c	5	3	6	6	**0**
e	9	**0**	1	0	3

METHODE DE RESOLUTION

- **EXEMPLE**



1-graphe d'affectation après re-ordonnancement des sommets marqués et non marqués



2-affectation après recherche de nouveaux zéros obtenus en augmentant le "coût"en ajoutant une liaison

METHODE DE RESOLUTION

- **FIN DE L'ALGORITHME**
  - Le nouveau tableau obtenu présente un zéro par ligne et colonne.
  - Coût de l'affectation: $\Sigma\sigma = \sigma_0 + \sigma_z = 4+1=5$
  - Le coût minimal de l'affectation des "regrets" est de 5

METHODE DE RESOLUTION

- **VALEUR DE L'AFFECTATION**

Nous savons que $\text{Max}(c_{ij})_{i,j} = v_M$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_M x_{ij} = v_M \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = K = n$$

$$\text{Max}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \min\left\{ n v_M - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \right\}$$

VM= 9; Z=45-5=40

METHODE DE RESOLUTION

- **TABLEAU DE L'AFFECTATION OPTIMALE**

	A	B	C	D	E
a	1				
b			1		
c					1
d				1	
e		1			

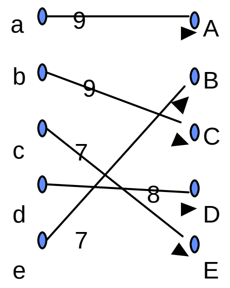
Solution 1

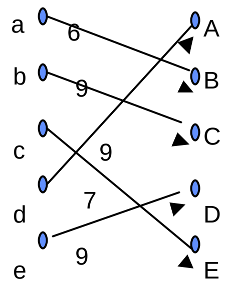
	A	B	C	D	E
a		1			
b			1		
c					1
d	1				
e				1	

Solution 2

METHODE DE RESOLUTION

- **GRAPHE DE LA SOLUTION OPTIMALE**





Toutes les affectations sont effectuées et la satisfaction globale est de 45 avec les deux solutions.

CAS PARTICULIER

- **AFFECTANTS ET AFFECTES SONT EN NOMBRE DIFFERENTS**
  - le nombre de lignes,m , est plus petit que le nombre de colonnes,n.
    - on ajoute à la matrice mxn, (n-m) lignes de zéro.
  - le nombre de lignes,m , est plus grand que le nombre de colonnes,n.
    - on ajoute à la matrice mxn, (m-n) colonnes de zéro.