

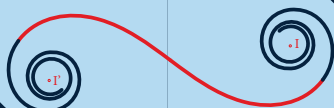
Formulaire

Courbes de Bézier

De Casteljaou

(degré 2 et 3)

Bézier Outils



Fort Socoa



frontispice : www.agence-ilargia.fr

Avant propos

Pour simplifier ce formulaire nous nommerons :

B_2 = courbe de Bézier de degré 2

B_3 = courbe de Bézier de degré 3

ce sont des courbes paramétriques.

La majorité des sujets traités dans ce formulaire ont été traduits en langage de programmation «Free Pascal» => unité «*B3OutilsV7*»

L'unité et des exemples sont disponibles dans *BezierOutilsV7.zip*

ici : <https://drive.google.com/file/d/1kzkM8y8hxB1S9LC03y7fPToYZCBG5zR8/view?usp=sharing>

Pour profiter du programme «*Maindemo*» il est nécessaire d'extraire *BezierOutilsV7.zip* sur le répertoire C:

Ce «pdf» en Anglais est disponible ici : **Bezier Curves Form V7**

Et en Espagnol ici : **Curvas de Bezier Formulario V7**

Table des matières

Equations des courbes de Bézier de degré 2.....	pages 4 et 5
Equations des courbes de Bézier de degré 3.....	pages 6 et 7
B3 spéciales.....	page 8
Changement de paramètres d'une courbe de Bézier	page 9
Intersection d'une droite avec une courbe de Bézier	page 10
Estimation du paramètre t Conversion d'une B-spline en B3	page 11
Parabole paramétrique , calcul du sommet et du foyer (B2)	pages 12 et 13
Points stationnaires et de croisement d'une courbe de Bézier	pages 14 et 15
Subdivisions récursives d'une courbe de Bézier (De Casteljau) ..	pages 16 et 17
Fusion de 2 courbes de Bézier	page 18
Distance d'un point à une courbe de Bézier	page 19
Centre de courbure (cercle osculateur)	page 20
Paramétrisation d'une fonction de degré 2 ou 3 , interpolation....	page 21
Aire, abscisse curviligne (longueur) d'une courbe de Bézier	pages 22 et 23
Simulation d'un arc de cercle par une courbe de Bézier	pages 24 et 25
Simulation d'un arc de clothoïde par une courbe de Bézier	pages 26 et 27
Courbe de Bézier passant strictement par 3 et 4 points.....	pages 28 et 29
Lissage, ajustement, de points par une courbe de Bézier.....	pages 30, 31, 32, 33
Résolution d'une équation du 3ème degré	pages 34 et 35
Formule du changement de base (modifiée)	page 36
Intersections : 2 droites (méthode Delambre) , 2 cercles	page 37
Angles orientés, coordonnées polaires	pages 38 et 39
Le cercle et ses tangentes.....	pages 40 et 41
Unit B3outilsV7 descriptif sommaire	pages 42, 43, 44, 45

Bibliographie

- [1] Modèles de Bézier des B-Splines et des Nurbs par G. DEMENGEL et J.P. POUGET éditions Ellipses
- [2] Topographie et topométrie modernes tome 1 : par S. MILLES et J. LAGOFUN éditions Eyrolles
- [3] Topographie et topométrie modernes tome 2 : par S. MILLES et J. LAGOFUN éditions Eyrolles
- [4] Cours de géométrie : par M. TROYANOV Presses polytechniques et universitaires romandes
- [5] Method'S classe de première : par T. PETIT éditions Ellipses
- [6] Cours de mathématique BTS UIT par Pierre VARIOT éditions Ellipses

Équations des courbes de Bézier de degré 2 (B_2) [1]

Pour calculer les coordonnées d'un point M de la courbe il faut connaître son paramètre t
 l'usage veut que le paramètre $t \in [0 \ 1]$

Equations vectorielles et analytiques

a) selon les polynômes de Bernstein

$$\vec{OM}(t) = (1-t)^2 \vec{OP_0} + 2t(1-t) \vec{OP_1} + t^2 \vec{OP_2}$$

$$M(t) \begin{cases} xM(t) = (1-t)^2 xP_0 + 2t(1-t) xP_1 + t^2 xP_2 \\ yM(t) = (1-t)^2 yP_0 + 2t(1-t) yP_1 + t^2 yP_2 \end{cases}$$

b) définition canonique (selon les puissances de t)

$$\vec{OM}(t) = t^2(\vec{P_1P_0} + \vec{P_1P_2}) + 2t(\vec{P_0P_1}) + \vec{OP_0}$$

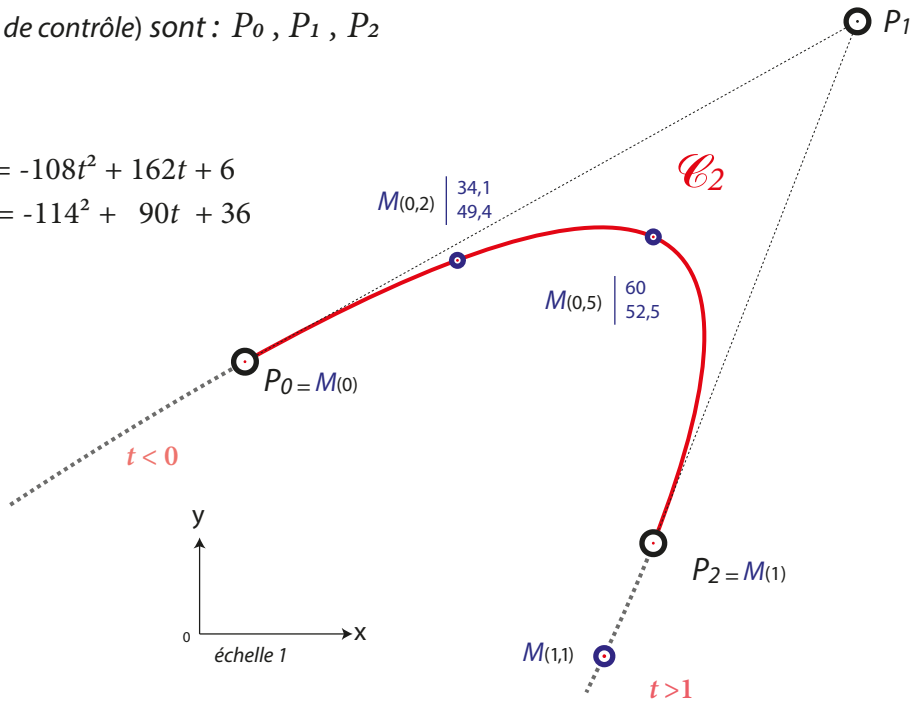
$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = t^2 (xP_0 - 2xP_1 + xP_2) + 2t(xP_1 - xP_0) + xP_0 \\ y = g(t) = t^2 (yP_0 - 2yP_1 + yP_2) + 2t(yP_1 - yP_0) + yP_0 \end{cases}$$

selon cet exemple la courbe \mathcal{C}_2 est une partie de parabole
 ses **points de définition** (ou points de contrôle) sont : P_0, P_1, P_2

\mathcal{C}_2	X	Y
P_0	6	36
P_1	87	81
P_2	60	12

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = -108t^2 + 162t + 6 \\ y = g(t) = -114t^2 + 90t + 36 \end{cases}$$

t	$xM(t)$	$yM(t)$
0	6	36
0,2	34,1	49,4
0,5	60	52,5
1	60	12
1,1	53,5	-2,9



Les vecteurs $\vec{P_0P_1}$ et $\vec{P_2P_1}$ sont respectivement tangent à \mathcal{C}_2 en P_0 et P_2

Calcul des coordonnées de $M(t)$ avec des Matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} xP_0 & yP_0 \\ xP_1 & yP_1 \\ xP_2 & yP_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xM(t) & yM(t) \end{bmatrix}$$

\mathcal{T}_n \mathcal{M}_2 (\vec{OP}) $\vec{OM}(t)$

Exemple (avec $t = 0,5$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 36 \\ 87 & 81 \\ 60 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 52,5 \end{bmatrix}$$

Équations des dérivées 1^{re} et 2^{de} => Hodographes : 1^{er} = \mathcal{H}' et 2^d = \mathcal{H}''

a) selon les polynômes de Bernstein

b) canonique (selon les puissances de t)

$$\overline{OM}'(t) = 2[(1-t)(\overline{P_0P_1}) + t(\overline{P_1P_2})]$$

$$\overline{OM}'(t) = 2t(\overline{P_1P_0} + \overline{P_1P_2}) + 2(\overline{P_0P_1})$$

$$M'(t) \begin{cases} xM'(t) = 2[(1-t)(xP_1 - xP_0) + t(xP_2 - xP_1)] \\ yM'(t) = 2[(1-t)(yP_1 - yP_0) + t(yP_2 - yP_1)] \end{cases}$$

$$M'(t) \begin{cases} x' = f'(t) = 2t(xP_0 - 2xP_1 + xP_2) + 2(xP_1 - xP_0) \\ y' = g'(t) = 2t(yP_0 - 2yP_1 + yP_2) + 2(yP_1 - yP_0) \end{cases}$$

a'') $\overline{OM}''(t) = \forall t \in \mathbb{R} = 2[P_0 - 2P_1 + P_2]$ \mathcal{H}'' $\begin{cases} x'' = 2(xP_0 - 2xP_1 + xP_2) \\ y'' = 2(yP_0 - 2yP_1 + yP_2) \end{cases}$ selon l'Exemple 2 $\begin{cases} -216 \\ -228 \end{cases}$
c'est le point

remarquons que \overline{OM}'' définit l'orientation de l'axe \mathbf{A} passant par le sommet de la parabole \mathcal{C}_2

Hodographe \mathcal{H}'

NB: \mathcal{H}' doit être équipollent: se dit de vecteurs parallèles, de même sens et de même grandeur.

Mais visuellement sur [0 1] il déborde du format A4 de la page => Pour y remédier il sera à l'échelle: $\frac{1}{2} = 0,5$

Donc graphiquement \mathcal{H}' ne sera pas équipollent car la norme des vecteurs est divisée par 2

Définition de l'hodographe \mathcal{H}' sur l'intervalle [0 1] avec l'équation $\overline{OM}'(t) = 2[(1-t)(\overline{P_0P_1}) + t(\overline{P_1P_2})]$

$$H'_0 = \overline{OM}'(0) = 2[(P_1 - P_0)]$$

$$H'_1 = \overline{OM}'(1) = 2[(P_2 - P_1)]$$

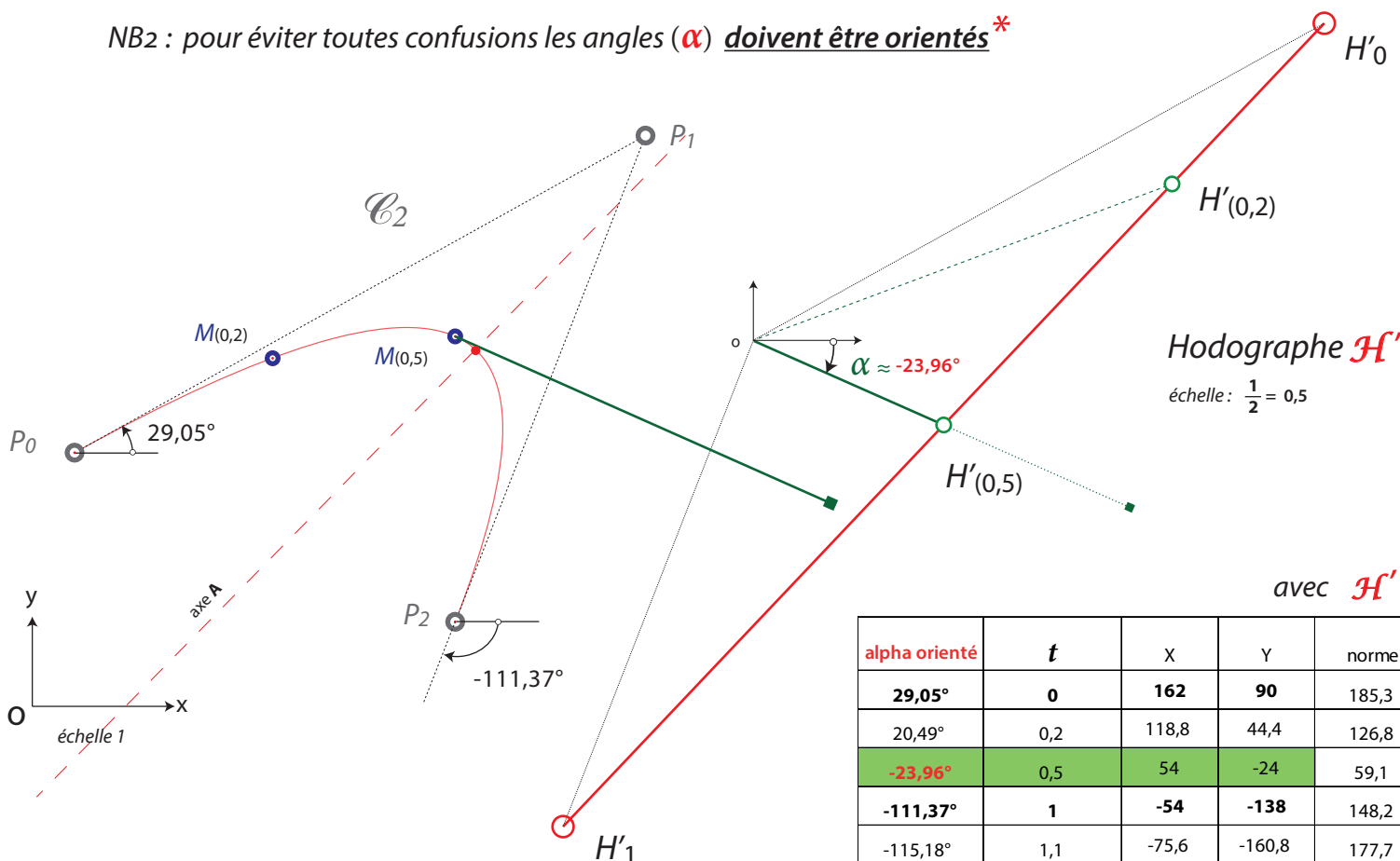
donc

\mathcal{H}'	X	Y
H'_0	162	90
H'_1	-54	-138

avec ces valeurs il est équipollent et peut servir à définir les vecteurs tangents

NB1: la tangente à \mathcal{C}_2 en un point $M(t) = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{yH'(t)}{xH'(t)} = \tan(\alpha)$

NB2: pour éviter toutes confusions les angles (α) doivent être orientés*



* Pour en savoir plus sur les angles orientés et les coordonnées polaires: voir pages 38 et 39

a) Définition selon les polynômes de Bernstein

$$\overline{OM}(t) = (1-t)^3 \overline{OP_0} + 3t(1-t)^2 \overline{OP_1} + 3t^2(1-t) \overline{OP_2} + t^3 \overline{OP_3}$$

$$M(t) \begin{cases} xM(t) = (1-t)^3 xP_0 + 3t(1-t)^2 xP_1 + 3t^2(1-t) xP_2 + t^3 xP_3 \\ yM(t) = (1-t)^3 yP_0 + 3t(1-t)^2 yP_1 + 3t^2(1-t) yP_2 + t^3 yP_3 \end{cases}$$

$$\overline{OM}'(t) = 3[(1-t)^2 (\overline{P_0P_1}) + 2t(1-t) (\overline{P_1P_2}) + t^2 (\overline{P_2P_3})]$$

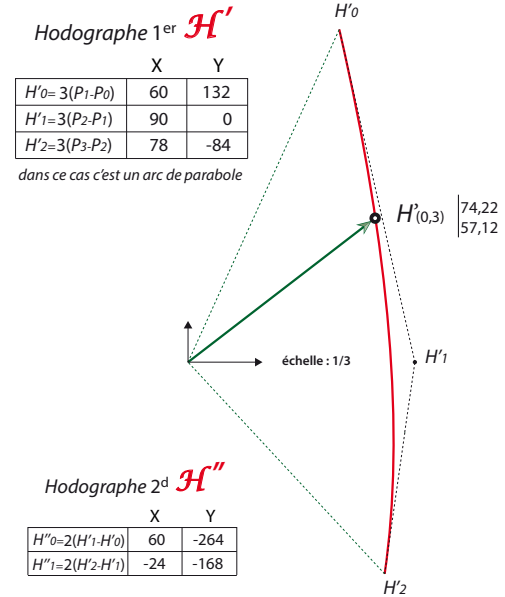
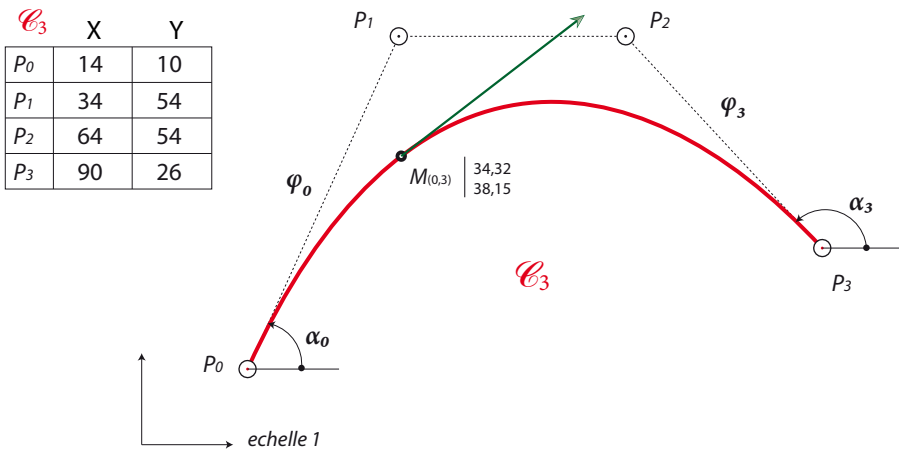
$$M'(t) \begin{cases} xM'(t) = 3[(1-t)^2 (xP_1-xP_0) + 2t(1-t)(xP_2-xP_1) + t^2(xP_3-xP_2)] \\ yM'(t) = 3[(1-t)^2 (yP_1-yP_0) + 2t(1-t)(yP_2-yP_1) + t^2(yP_3-yP_2)] \end{cases}$$

$$\overline{OM}''(t) = 6[(1-t) (\overline{P_1P_0} + \overline{P_1P_2}) + t (\overline{P_2P_1} + \overline{P_2P_3})]$$

$$M''(t) \begin{cases} xM''(t) = 6[(1-t) (xP_2-xP_0) + t (xP_1-2xP_2+xP_3)] \\ yM''(t) = 6[(1-t) (yP_2-yP_0) + t (yP_1-2yP_2+yP_3)] \end{cases}$$

$$\overline{OM}'''(t) = 6[(\overline{P_0P_3}) + 3(\overline{P_2P_1})]$$

$$M'''(t) \begin{cases} xM'''(t) = 6[xP_3-xP_0 + 3(xP_1-xP_2)] \\ yM'''(t) = 6[yP_3-yP_0 + 3(yP_1-yP_2)] \end{cases}$$



Les vecteurs $\overline{P_0P_1}$ et $\overline{P_3P_2}$ sont respectivement tangents à \mathcal{C}_3 en P_0 et P_3

b) Définition avec $P_0 P_1 P_2 P_3$ isolés .

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = (1-t)^3 xP_0 + 3t(1-t)^2 xP_1 + 3t^2(1-t) xP_2 + t^3 xP_3 \\ y = g(t) = (1-t)^3 yP_0 + 3t(1-t)^2 yP_1 + 3t^2(1-t) yP_2 + t^3 yP_3 \end{cases}$$

$$M'(t) \begin{cases} x' = f'(t) = -3[(1-t)^2 xP_0 - (1-t)(1-3t) xP_1 - t(2-3t) xP_2 - t^2 xP_3] \\ y' = g'(t) = -3[(1-t)^2 yP_0 - (1-t)(1-3t) yP_1 - t(2-3t) yP_2 - t^2 yP_3] \end{cases}$$

$$M''(t) \begin{cases} x'' = f''(t) = 6[(1-t) xP_0 - (2-3t) xP_1 + (1-3t) xP_2 + t xP_3] \\ y'' = g''(t) = 6[(1-t) yP_0 - (2-3t) yP_1 + (1-3t) yP_2 + t yP_3] \end{cases}$$

$$M'''(t) \begin{cases} x''' = f'''(t) = 6[xP_3 - xP_0 + 3(xP_1 - xP_2)] \\ y''' = g'''(t) = 6[yP_3 - yP_0 + 3(yP_1 - yP_2)] \end{cases}$$

c) Définition vecteurs et contraintes .

En posant : $V_0 = \overline{OP_0}$; $V_1 = (\overline{OP_1} - \overline{OP_0})$; $V_2 = (\overline{OP_2} - \overline{OP_1})$; $V_3 = (\overline{OP_3} - \overline{OP_2})$

$$\overline{OM}(t) = V_0 + (1-(1-t)^3) V_1 + (3t^2-2t^3) V_2 + t^3 V_3$$

$$\overline{OM}'(t) = 3[(1-t)^2) V_1 + 2t(1-t) V_2 + t^2 V_3]$$

$$\overline{OM}''(t) = -6[(1-t) V_1 - (1-2t) V_2 - t V_3]$$

$$\overline{OM}'''(t) = 6[V_1 - 2V_2 + V_3]$$

c) Définition de $M(t)$ matriciellement

$$\begin{matrix} t & 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0,3 & 0,1 & 0,027 \\ 0,7 & 1 & 0,7 & 0,5 & 0,343 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{matrice de passage} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \begin{bmatrix} xP & yP \\ 14 & 10 \\ 34 & 54 \\ 64 & 54 \\ 90 & 26 \end{bmatrix} \\ (\overline{OP}) \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} xM(t) & yM(t) \\ 14,00 & 10,00 \\ 34,32 & 38,15 \\ 65,90 & 43,21 \\ 90,00 & 26,00 \end{bmatrix} \\ \overline{OM}(t) \end{matrix}$$

d) Définition canonique (selon les puissances de t) $\Rightarrow \vec{OM}(t) = \vec{OC}_0 t^3 + \vec{OC}_1 t^2 + \vec{OC}_2 t + \vec{OC}_3$

Avec: $x_{C_0} = x_3 = (x_{P_3} - x_{P_0} + 3(x_{P_1} - x_{P_2}))$

$x_{C_1} = x_2 = 3(x_{P_0} + x_{P_2} - 2x_{P_1})$

$x_{C_2} = x_1 = 3(x_{P_1} - x_{P_0})$

$x_{C_3} = x_0 = x_{P_0}$ (Resp. pour les y)

$x_{P_0} = x_0$

$x_{P_1} = \frac{x_1}{3} + x_{P_0}$

$x_{P_2} = \frac{x_2}{3} - x_{P_0} + 2x_{P_1}$

$x_{P_3} = x_3 + x_{P_0} - 3(x_{P_1} - x_{P_2})$ (Resp. pour les y)

Réciproquement

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = x_3 t^3 + x_2 t^2 + x_1 t + x_0 \\ y = g(t) = y_3 t^3 + y_2 t^2 + y_1 t + y_0 \end{cases} \quad M'(t) \begin{cases} x' = f'(t) = 3x_3 t^2 + 2x_2 t + x_1 \\ y' = g'(t) = 3y_3 t^2 + 2y_2 t + y_1 \end{cases} \quad M''(t) \begin{cases} x'' = f''(t) = 6x_3 t + 2x_2 \\ y'' = g''(t) = 6y_3 t + 2y_2 \end{cases} \quad M'''(t) \begin{cases} x''' = 6x_3 \\ y''' = 6y_3 \end{cases}$$

Donc dans notre exemple les points de \mathcal{C}_3 sont aussi définis par: $M(t) \begin{cases} x = f(t) = -14t^3 + 30t^2 + 60t + 14 \\ y = g(t) = 16t^3 - 132t^2 + 132t + 10 \end{cases}$

Et matriciellement avec: $(\vec{OC}) = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad \vec{OM}(t) = {}^T(\vec{OC})\mathcal{I}_n$

e) Définition canonique avec P_1 et P_3 définis par coordonnées polaires*

avec $\alpha_0 =$ angle orienté P_0P_1 , $\varphi_0 = \|P_0P_1\|$, $\alpha_3 =$ angle orienté P_3P_2 , $\varphi_3 = \|P_3P_2\|$

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = t^3 (2x_{P_0} + 3\varphi_0 \cos(\alpha_0) - 3\varphi_3 \cos(\alpha_3) - 2x_{P_3}) - 3t^2 (x_{P_0} + 2\varphi_0 \cos(\alpha_0) - \varphi_3 \cos(\alpha_3) - x_{P_3}) + 3t \varphi_0 \cos(\alpha_0) + x_{P_0} \\ y = g(t) = t^3 (2y_{P_0} + 3\varphi_0 \sin(\alpha_0) - 3\varphi_3 \sin(\alpha_3) - 2y_{P_3}) - 3t^2 (y_{P_0} + 2\varphi_0 \sin(\alpha_0) - \varphi_3 \sin(\alpha_3) - y_{P_3}) + 3t \varphi_0 \sin(\alpha_0) + y_{P_0} \end{cases}$$

e1) Avec P_1 connus et fixe.

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = t^3 (-x_{P_0} + 3x_{P_1} - 3\varphi_3 \cos(\alpha_3) - 2x_{P_3}) + 3t^2 (x_{P_0} - 2x_{P_1} + \varphi_3 \cos(\alpha_3) + x_{P_3}) + 3t (x_{P_1} - x_{P_0}) + x_{P_0} \\ y = g(t) = t^3 (-y_{P_0} + 3y_{P_1} - 3\varphi_3 \sin(\alpha_3) - 2y_{P_3}) + 3t^2 (y_{P_0} - 2y_{P_1} + \varphi_3 \sin(\alpha_3) + y_{P_3}) + 3t (y_{P_1} - y_{P_0}) + y_{P_0} \end{cases}$$

e2) Avec P_2 connus et fixe.

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = t^3 (2x_{P_0} + 3\varphi_0 \cos(\alpha_0) - 3x_{P_2} + x_{P_3}) - 3t^2 (x_{P_0} + 2\varphi_0 \cos(\alpha_0) - x_{P_2}) + 3t \varphi_0 \cos(\alpha_0) + x_{P_0} \\ y = g(t) = t^3 (2y_{P_0} + 3\varphi_0 \sin(\alpha_0) - 3y_{P_2} + y_{P_3}) - 3t^2 (y_{P_0} + 2\varphi_0 \sin(\alpha_0) - y_{P_2}) + 3t \varphi_0 \sin(\alpha_0) + y_{P_0} \end{cases}$$

f) Définition par coordonnées polaires avec P_0 et P_3 isolés.

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = (1-t)^2(2t+1) x_{P_0} + 3t(1-t)^2 \varphi_0 \cos(\alpha_0) + 3t^2(1-t) \varphi_3 \cos(\alpha_3) + t^2(3-2t)x_{P_3} \\ y = g(t) = (1-t)^2(2t+1) y_{P_0} + 3t(1-t)^2 \varphi_0 \sin(\alpha_0) + 3t^2(1-t) \varphi_3 \sin(\alpha_3) + t^2(3-2t)y_{P_3} \end{cases}$$

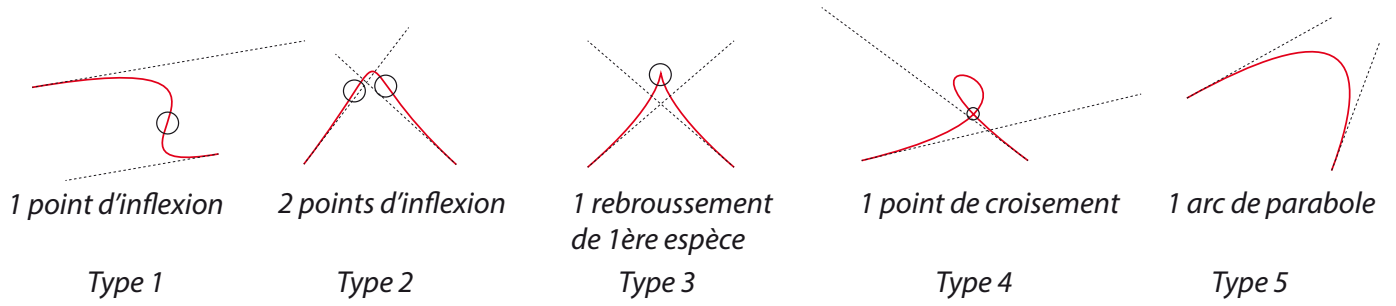
$$M'(t) \begin{cases} x' = f'(t) = 3 [-2t(1-t) x_{P_0} + (1-t)(1-3t) \varphi_0 \cos(\alpha_0) + t(2-3t) \varphi_3 \cos(\alpha_3) + 2t(1-t)x_{P_3}] \\ y' = g'(t) = 3 [-2t(1-t) y_{P_0} + (1-t)(1-3t) \varphi_0 \sin(\alpha_0) + t(2-3t) \varphi_3 \sin(\alpha_3) + 2t(1-t)y_{P_3}] \end{cases}$$

$$M''(t) \begin{cases} x'' = f''(t) = 6 [-(1-2t) x_{P_0} - (2-3t) \varphi_0 \cos(\alpha_0) + (1-3t) \varphi_3 \cos(\alpha_3) + (1-2t)x_{P_3}] \\ y'' = g''(t) = 6 [-(1-2t) y_{P_0} - (2-3t) \varphi_0 \sin(\alpha_0) + (1-3t) \varphi_3 \sin(\alpha_3) + (1-2t)y_{P_3}] \end{cases}$$

$$M'''(t) \begin{cases} x''' = f'''(t) = 6 [2x_{P_0} + 3\varphi_0 \cos(\alpha_0) - 3\varphi_3 \cos(\alpha_3) - 2x_{P_3}] \\ y''' = g'''(t) = 6 [2y_{P_0} + 3\varphi_0 \sin(\alpha_0) - 3\varphi_3 \sin(\alpha_3) - 2y_{P_3}] \end{cases}$$

*Pour en savoir plus sur les angles orientés et les coordonnées polaires : voir pages 38 et 39

les différents types de B_3



B_3 spéciales (quelques exemples)

a) Courbe B_3 qui est une portion de parabole

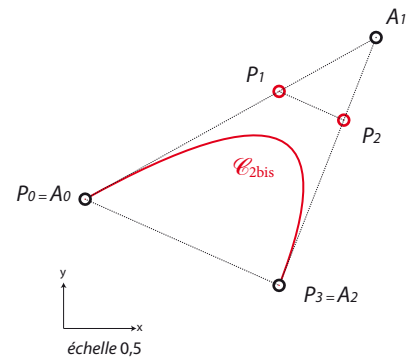
Dans la plupart des logiciels de dessin vectoriel seules les courbes de Bézier de degré 3 sont utilisées. Voici une méthode pour afficher un vrai segment de parabole avec une B_3 .

Il faut que P_1 soit au $\frac{2}{3}$ de $\overrightarrow{A_0A_1}$ et P_2 au $\frac{2}{3}$ de $\overrightarrow{A_2A_1}$

\mathcal{C}_2	X	Y
A_0	6	36
A_1	87	81
A_2	60	12

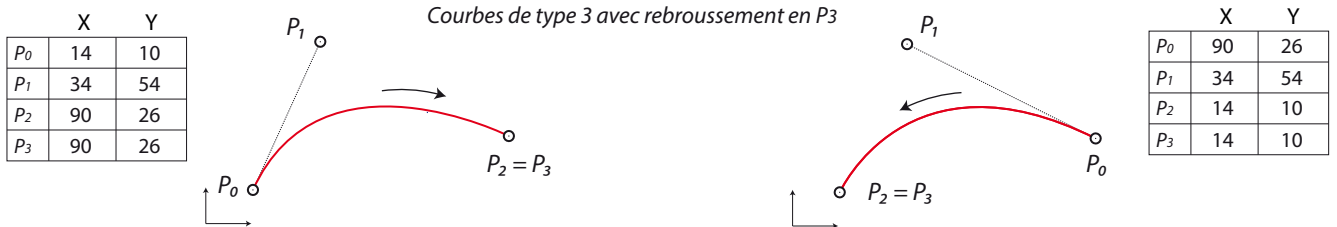
=

\mathcal{C}_{2bis}	X	Y
P_0	6	36
P_1	60	66
P_2	78	58
P_3	60	12



b) Courbe B_3 définie par «3 points» utilisée dans le système Postscript.

La courbe est définie par $P_0 P_1 P_2 P_3$ mais P_2 est confondu avec P_3 .

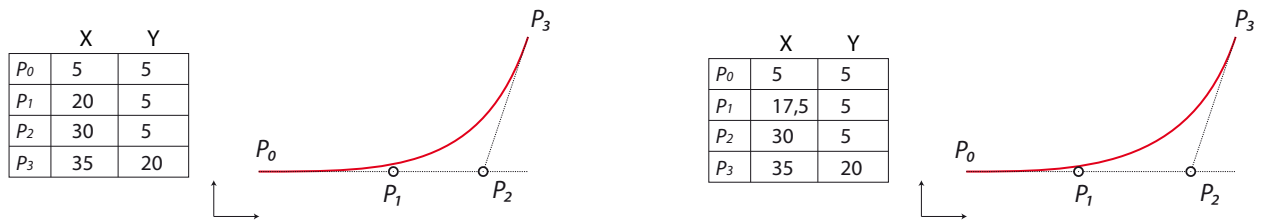


c) Courbe avec P_2 sur la tangente P_0P_1

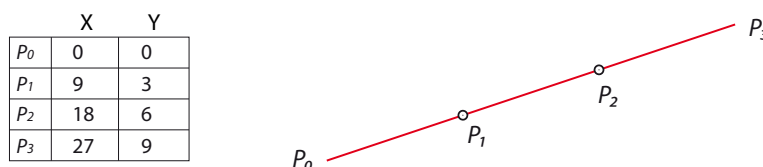
d) Courbe avec P_2 sur la tangente P_0P_1 et P_1 au milieu de P_0P_2

Courbe de type 2 avec deux inflexions dont une en P_0

Courbe de type 1 avec une inflexion en P_0



e) Droite définie par une $B_3 \Rightarrow$ il faut que P_1 soit à $\frac{1}{3}$ de $\overrightarrow{P_0P_3}$ et P_2 à $\frac{1}{3}$ de $\overrightarrow{P_3P_0}$



Changement des paramètres d'une B_3 par rotation et translation*

Nous utiliserons la définition canonique d'une B_3 $\Rightarrow M(t) \begin{cases} x = f(t) = x_3 t^3 + x_2 t^2 + x_1 t + x_0 \\ y = g(t) = y_3 t^3 + y_2 t^2 + y_1 t + y_0 \end{cases}$

Exemple avec une courbe "incliné" et ses hodographes

\mathcal{C}_4	X	Y
P_0	1	3
P_1	5	8
P_2	4	1
P_3	6	5

courbe de type 2

$$\mathcal{C}_4 \begin{cases} xM(t) = f(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 \\ yM(t) = g(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 \end{cases}$$

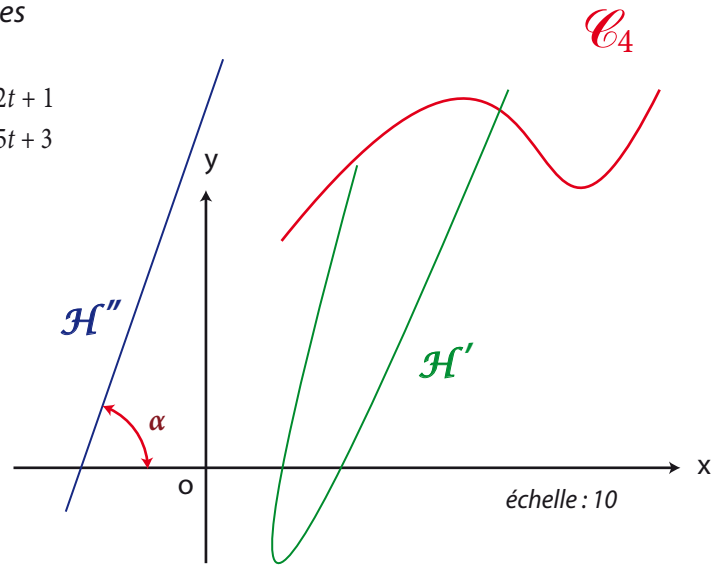
$$M''' \begin{cases} x''' = 6x_3 = 48 \\ y''' = 6y_3 = 132 \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{23}{8} \Rightarrow \alpha \approx 70,821^\circ$$

$$\vec{b} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{-36}{-15} \Rightarrow \beta \approx 67,380^\circ$$

$$\vec{c} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{15}{12} \Rightarrow \gamma \approx 51,340^\circ$$

$$\vec{d} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{3}{1} \Rightarrow \delta \approx 71,565^\circ$$



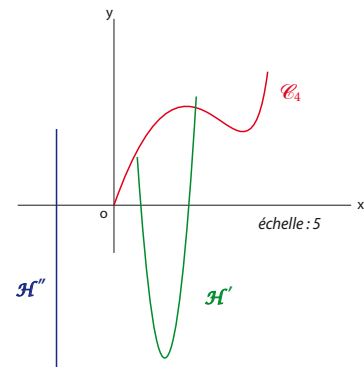
NB : les angles α, β, \dots ne doivent pas être orientés

Méthode pour "redresser" et simplifier une courbe B_3 par rotation et translation :

Appliquer une rotation* de $(\frac{\pi}{2} - \alpha) \approx 19,179^\circ$ de centre $P_0|_3^1$ et une translation de $-P_0|_{-3}^1$

\mathcal{C}_4	X	Y
P_0	0	0
P_1	2,14	6,04
P_2	3,49	-0,90
P_3	4,07	3,53

$$\approx \mathcal{C}_4 \begin{cases} f(t) \approx 0 t^3 - 2,34 t^2 + 6,41 t + 0 \\ g(t) \approx 24,35 t^3 - 38,93 t^2 + 18,11 t + 0 \end{cases}$$



Avec une rotation de $-\alpha$ c'est le coefficient y_3 qui sera nul.

De la même manière une rotation impliquant β les coef. x_2 ou y_2 seront = 0 etc...

En fait l'invariance affine du paramètre t autorise ces changements.

Cela veut dire que quelque soit l'orientation de la courbe sur \mathbb{R}^2 le paramètre t ne change pas.

Cette astuce n'est pas à négliger.

Elle permet, entre autre, de déterminer le point de croisement d'une B_3 de type 4 (voir page 15)
aussi le calcul du foyer d'une parapole (voir page 13)

*Rotation à l'aide de la formule du changement de base (modifiée) voir page 36

Intersection d'une droite avec une B3, calcul du paramètre t

Exemples

∩ avec par exemple une droite d'équation $x = 2$ ou $y = 4,5$

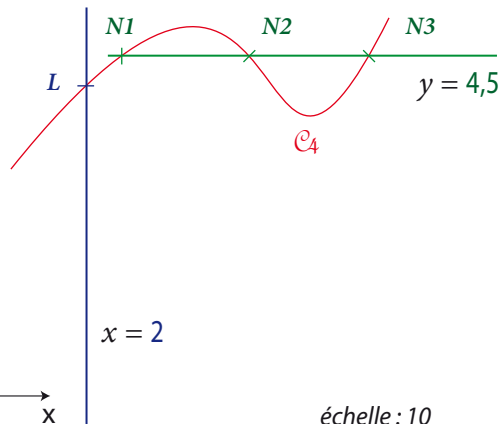
∩ avec une droite définie par un point E et son coefficient directeur a

Exemple 1 avec C4 et L | 2

C4	X	Y
P0	1	3
P1	5	8
P2	4	1
P3	6	5

$$C4 \begin{cases} xM(t) = f(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 \\ yM(t) = g(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 \end{cases}$$

$$xM(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 = 2$$



Donc il faut résoudre: * $8t^3 - 15t^2 + 12t - 1 = 0$

=> 1 solution réelle: $t \approx 0,0938 \Rightarrow L \begin{vmatrix} 2 \\ 4,11 \end{vmatrix}$

Exemple 2 avec C4 et N | 4,5

en développant => $yM(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 = 4,5$

$$23t^3 - 36t^2 + 15t - 1,5 = 0 \Rightarrow 3 \text{ solutions réelles :}$$

$t_1 \approx 0,1470$	$t_2 \approx 0,4660$	$t_3 \approx 0,9523$
$N1 \begin{vmatrix} 2,47 \\ 4,5 \end{vmatrix}$	$N2 \begin{vmatrix} 4,14 \\ 4,5 \end{vmatrix}$	$N3 \begin{vmatrix} 5,73 \\ 4,5 \end{vmatrix}$

Intersection avec une droite définie par un point E et son coefficient directeur a

Exemple 3

avec $M(t) \begin{cases} x = f(t) = x_3t^3 + x_2t^2 + x_1t + x_0 \\ y = g(t) = y_3t^3 + y_2t^2 + y_1t + y_0 \end{cases} \quad E \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad a = 1$

=> $C4 \begin{cases} xM(t) = f(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 \\ yM(t) = g(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 \end{cases}$

Résoudre: $\frac{y_{C4} - y_E}{x_{C4} - x_E} = a$

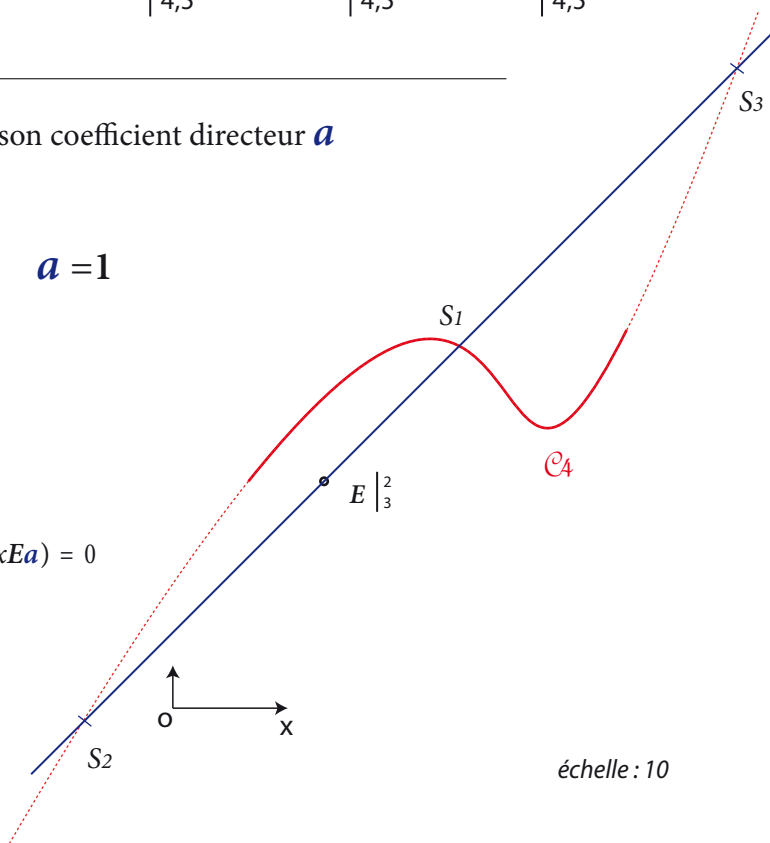
=> $(y_3 - ax_3)t^3 + (y_2 - ax_2)t^2 + (y_1 - ax_1)t + (y_0 - ax_0 - y_E + x_E a) = 0$

=> $15t^3 - 21t^2 + 3t + 1 = 0$

=> 3 solutions réelles :

$t_1 \approx 0,3692 \quad t_2 \approx -0,1526 \quad t_3 \approx 1,1834$

$S1 \begin{vmatrix} 3,78 \\ 4,78 \end{vmatrix} \quad S2 \begin{vmatrix} -1,21 \\ -0,21 \end{vmatrix} \quad S3 \begin{vmatrix} 7,45 \\ 8,45 \end{vmatrix}$



Intersection de 2 B3

Un algorithme s'impose => <https://pomax.github.io/bezierinfo/#intersections>

* pour résoudre une équation du 3ème degré allez sur les page 34 et 35

Estimation du paramètre t

Dans certains calculs, il est parfois nécessaire d'estimer le paramètre t d'un ou plusieurs points M .

Exemple avec la *méthode des normes*

$$\text{soit : } \|PoP_3\| \approx 49,82 \quad \|PoM_1\| \approx 16,13 \quad \|PoM_2\| \approx 35,47$$

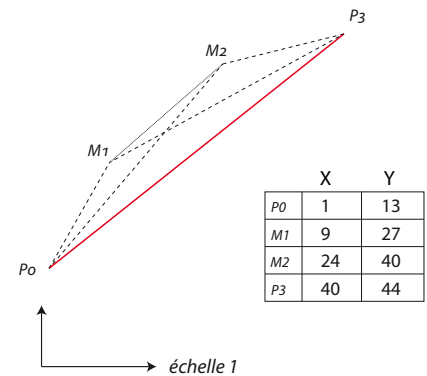
$$t_{(M_1)} = \frac{\|PoM_1\|}{\|PoP_3\|} \approx 0,3237 \quad t_{(M_2)} = \frac{\|PoM_2\|}{\|PoP_3\|} \approx 0,7119$$

$$\text{Et aussi avec : } \|PoP_3\| \approx 49,82 \quad \|P_3M_1\| \approx 35,36 \quad \|P_3M_2\| \approx 16,49$$

$$t_{(M_1)} = 1 - \frac{\|P_3M_1\|}{\|PoP_3\|} \approx 0,2903 \quad t_{(M_2)} = 1 - \frac{\|P_3M_2\|}{\|PoP_3\|} \approx 0,6690$$

$$t_{(M_1)} \text{ moyen} \approx 0,3070$$

$$t_{(M_2)} \text{ moyen} \approx 0,6905$$



Conversion d'une B-spline (cubique) en B_3

Equations d'une B-spline avec ses points de contrôle : $Q_0 Q_1 Q_2 Q_3$

$$M(t) \begin{cases} xM(t) = \frac{1}{6} [(1-t)^3 xQ_0 + (3t^3 - 6t^2 + 4) xQ_1 + (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) xQ_2 + t^3 xQ_3] \\ yM(t) = \frac{1}{6} [(1-t)^3 yQ_0 + (3t^3 - 6t^2 + 4) yQ_1 + (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) yQ_2 + t^3 yQ_3] \end{cases}$$

B-spline

	X	Y
Q0	3	5
Q1	24	35
Q2	63	23
Q3	78	-7

Equations d'une courbe de Bézier avec ses points de définition : $P_0 P_1 P_2 P_3$

$$M(t) \begin{cases} xM(t) = (1-t)^3 xP_0 + 3t(1-t)^2 xP_1 + 3t^2(1-t) xP_2 + t^3 xP_3 \\ yM(t) = (1-t)^3 yP_0 + 3t(1-t)^2 yP_1 + 3t^2(1-t) yP_2 + t^3 yP_3 \end{cases}$$

Bézier

	X	Y
P0	27	28
P1	37	31
P2	50	27
P3	59	20

conversion B-Spline en B_3

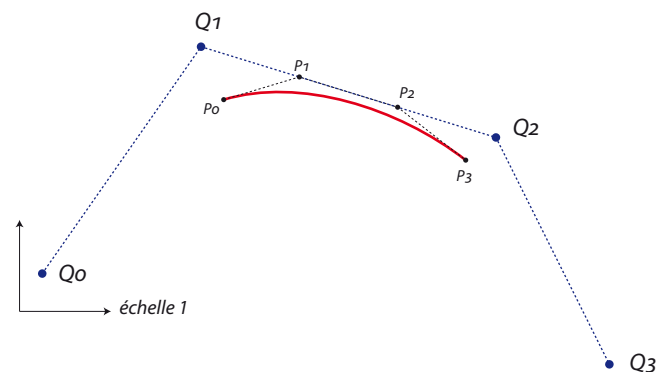
$$\begin{aligned} xP_0 &= \frac{1}{6} (xQ_0 + 4xQ_1 + xQ_2) \\ xP_1 &= \frac{1}{6} (4xQ_1 + 2xQ_2) \\ xP_2 &= \frac{1}{6} (2xQ_1 + 4xQ_2) \\ xP_3 &= \frac{1}{6} (xQ_1 + 4xQ_2 + xQ_3) \end{aligned}$$

idem pour les y

conversion B_3 en B-Spline

$$\begin{aligned} xQ_0 &= (6xP_0 - 7xP_1 + 2xP_2) \\ xQ_1 &= (2xP_1 - xP_2) \\ xQ_2 &= (-xP_1 + 2xP_2) \\ xQ_3 &= (2xP_1 - 7xP_2 + 6xP_3) \end{aligned}$$

idem pour les y



Parabole (B2) : calcul de son axe **A**, son sommet **S** et son foyer **F**

Calcul du sommet **S** avec $\mathcal{H}'' \left| \begin{array}{l} x'' = -216 \\ y'' = -228 \end{array} \right.$

le coef dir. de l'axe **A** de la parabole = $\vec{a} = \frac{y\mathcal{H}''}{x\mathcal{H}''}$ La tangente au sommet **S** = $\vec{d} = -\frac{1}{\vec{a}} = -\frac{x\mathcal{H}''}{y\mathcal{H}''}$

calcul du paramètre **t** du sommet **S** avec : $M'(t) \left| \begin{array}{l} x' = f'(t) = 2t(xP_0 - 2xP_1 + xP_2) + 2(xP_1 - xP_0) \\ y' = g'(t) = 2t(yP_0 - 2yP_1 + yP_2) + 2(yP_1 - yP_0) \end{array} \right.$

$$\vec{d} = \frac{2t(yP_0 - 2yP_1 + yP_2) + 2(yP_1 - yP_0)}{2t(xP_0 - 2xP_1 + xP_2) + 2(xP_1 - xP_0)} \quad \text{donc } t_{(\text{sommet})} = \frac{(yP_1 - yP_0) - \vec{d}(xP_1 - xP_0)}{\vec{d}(xP_0 - 2xP_1 + xP_2) - (yP_0 - 2yP_1 + yP_2)}$$

Exemple

avec

\mathcal{C}_2	X	Y
P_0	6	36
P_1	87	81
P_2	60	12

 $\mathcal{C}_2 \left| \begin{array}{l} xM(t) = -108t^2 + 162t + 6 \\ yM(t) = -114t^2 + 90t + 36 \end{array} \right.$

$$\vec{a} = \frac{-228}{-216} \quad \vec{d} = -\frac{216}{228} \quad \text{donc } t_{(\text{sommet})} \approx 0,5627737 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} \left| \begin{array}{l} x\mathbf{S}(t_{\text{sommet}}) \approx 62,964 \\ y\mathbf{S}(t_{\text{sommet}}) \approx 50,544 \end{array} \right.$$

Calcul du foyer **F** (méthode indirecte) [1]

Il convient de noter que l'intersection* d'une tangente à \mathcal{C}_2 (par exemple P_2P_1) avec l'axe **A** détermine **L**

Le foyer **F** sera déterminé par l'intersection de la médiatrice de P_2L avec l'axe **A**.

NB : **M** est le point milieu du segment P_2L

Exemple

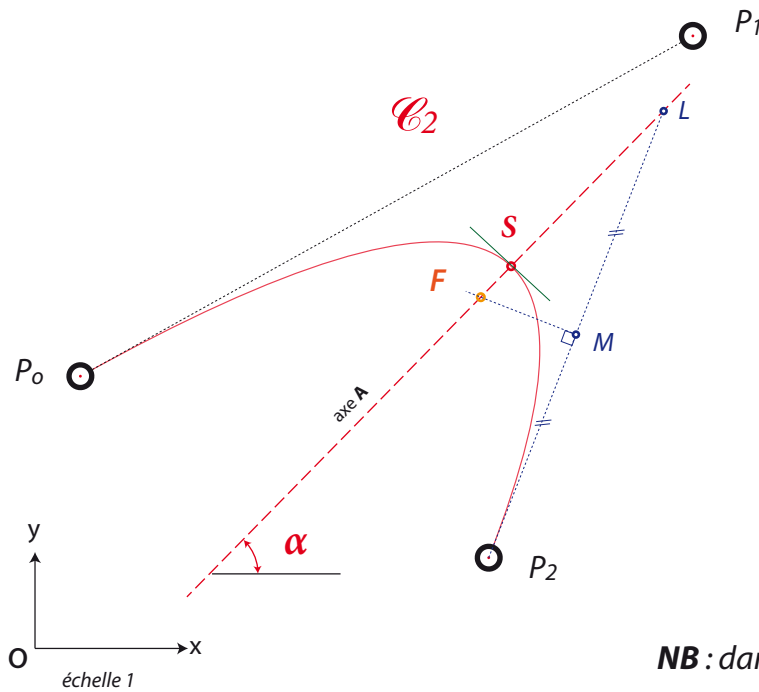
$$\mathbf{L} = (\mathbf{S} ; \vec{a}) \cap \overrightarrow{P_2P_1}$$

	X	Y	coef dir.
P_2	60	12	2,5556 (coef dir. de $\overrightarrow{P_2P_1}$)
S	62,964	50,544	1,0556 (a)
L	83,61	72,34	

$$\mathbf{F} = (\mathbf{S} ; \vec{a}) \cap \text{médiatrice de } \overrightarrow{P_2L}$$

	X	Y	coef dir.
S	62,564	50,544	1,0556 (a)
M	71,81	42,17	-0,3913 ($-1 \div 2,5556$)
F	59,566	46,958	

* voir page 37 intersection avec la formule de Delambre



$$C_2 \begin{cases} xM(t) = -108t^2 + 162t + 6 \\ yM(t) = -114t^2 + 90t + 36 \end{cases}$$

$$S \begin{cases} 62,964 \\ 50,544 \end{cases}$$

$$\alpha = \arctan(\vec{a}) \approx 46,5482^\circ$$

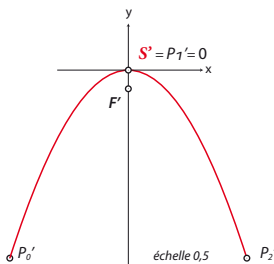
NB : dans ce cas l'angle α ne doit pas être orienté

Calcul du foyer F «méthode directe»

Dans un premier temps il faut que le sommet de la parabole soit à l'origine du repère orthonormé, et son axe A doit coïncider avec l'axe OY .

Nous allons donc effectuer un changement de base avec une rotation de $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

dont le centre de rotation Ω est le sommet S et appliquer une translation de : $-xS$ $-yS$



Donc dans ce cas la avec $\Omega = S \begin{cases} 62,964 & \Delta x \approx -62,964 \\ 50,544 & \Delta y \approx -50,544 \end{cases}$

$$P_0' \begin{cases} xP_0' = \cos(\alpha)(xP_0 - xS) - \sin(\alpha)(yP_0 - yS) \approx -31,351 \\ yP_0' = \sin(\alpha)(xP_0 - xS) + \cos(\alpha)(yP_0 - yS) \approx -49,735 \end{cases}$$

$$P_2' \text{ est la symétrique de } P_0' \begin{cases} xP_2' \approx 31,351 \\ yP_2' \approx -49,735 \end{cases} \quad P_1' = S' = 0$$

En interpolant les points P_0', P_1', P_2' par la méthode de Newton $\Rightarrow N_1 = \frac{yP_0' - yP_1'}{xP_0' - xP_1'} = \frac{yP_0'}{xP_0'}$ $N_2 = \frac{yP_1' - yP_2'}{xP_1' - xP_2'} = \frac{-yP_2'}{-xP_2'}$

le paramètre a de la parabole $= \frac{N_1 - N_2}{xP_0' - xP_2'} = \frac{yP_0'}{(xP_0')^2} \approx -0,05060 \Rightarrow F' \begin{cases} xF' = 0 \\ yF' = \frac{1}{4a} = \frac{(xP_0')^2}{4yP_0'} \approx -4,9405 \end{cases}$

Retour à la base initiale en posant : $F \begin{cases} xF = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)(xF' - x\Omega - \Delta x) + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)(yF' - y\Omega - \Delta y) + x\Omega = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)yF' + xS \\ yF = -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)(xF' - x\Omega - \Delta x) + \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)(yF' - y\Omega - \Delta y) + y\Omega = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)yF' + yS \end{cases}$

Donc directement avec : S , $A = (xP_0 - xS)$, $B = (yP_0 - yS)$ et $yF' = \frac{(xP_0')^2}{4yP_0'}$

$$F \begin{cases} xF = \cos(\alpha)(yF') + xS = \frac{(\sin(\alpha)A - \cos(\alpha)B)^2}{4(A + \cotan(\alpha)B)} + xS \\ yF = \sin(\alpha)(yF') + yS = \frac{(\sin(\alpha)A - \cos(\alpha)B)^2}{4(\tan(\alpha)A + B)} + yS \end{cases}$$

NB : le calcul de F peut se faire sur \mathbb{R}^2 avec $P_0 = n'$ importe quel point de la parabole hormis son sommet.

Points stationnaires et de croisement d'une B_3 [1]

Pour déterminer ces points utilisons la formule suivante : le déterminant $[B_3'(t), B_3''(t)] = 0$

Avec : $B_3' \Rightarrow \begin{cases} x' = f'(t) = 3x_3t^2 + 2x_2t + x_1 \\ y' = g'(t) = 3y_3t^2 + 2y_2t + y_1 \end{cases}$ et $B_3'' \Rightarrow \begin{cases} x'' = f''(t) = 6x_3t + 2x_2 \\ y'' = g''(t) = 6y_3t + 2y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} f'(t) & f''(t) \\ g'(t) & g''(t) \end{bmatrix} \Rightarrow f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t) = 0$

En développant : $\Rightarrow (x_2y_3 - x_3y_2)t^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)t + (x_1y_2 - x_2y_1)/3 = At^2 + Bt + C = 0$

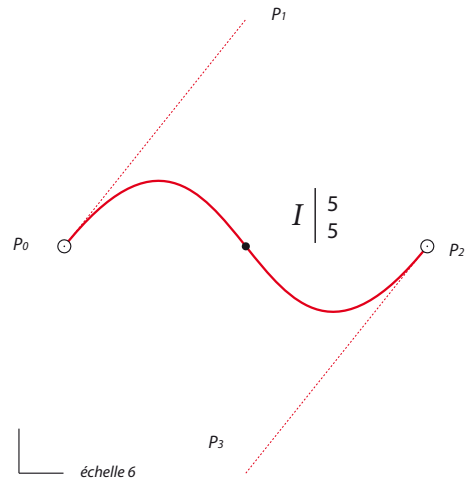
Si $\Delta > 0$ et $A=0 \Rightarrow$ 1 pt d'inflexion Si $\Delta=0 \Rightarrow$ 1 pt rebroussement Si $A=0$ et $B=0 \Rightarrow$ 1 arc de parabole
 Si $\Delta > 0$ et $A \neq 0 \Rightarrow$ 2 pts d'inflexions Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ 1 pt croisement

1) courbe de type 1 (avec un point d'inflexion)

\mathcal{C}_{31}

	X	Y
P_0	1	5
P_1	5	10
P_2	5	0
P_3	9	5

$\mathcal{C}_{31} \begin{cases} f(t) = 8t^3 - 12t^2 + 12t + 1 \\ g(t) = 30t^3 - 45t^2 + 15t + 5 \end{cases}$



$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 0t^2 + 240t - 120 = 0 \quad (\Delta=57600 \text{ et } A=0)$
 $\Rightarrow t = 0,5$

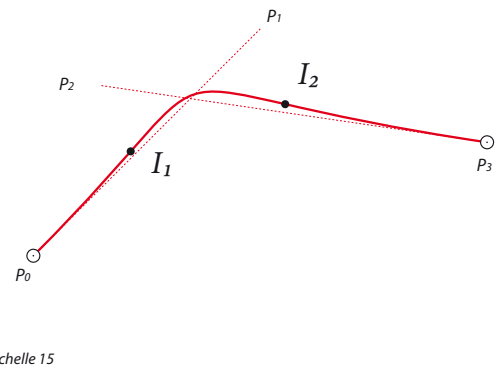
1 point d'inflexion en $I_{(0,5)} \begin{vmatrix} 5 \\ 5 \end{vmatrix}$

2) courbe de type 2 (avec deux points d'inflexions)

\mathcal{C}_{32}

	X	Y
P_0	1	1
P_1	3	3
P_2	1.6	2.5
P_3	5	2

$\mathcal{C}_{32} \begin{cases} f(t) = 8,2t^3 - 10,2t^2 + 6t + 1 \\ g(t) = 2,5t^3 - 7,5t^2 + 6t + 1 \end{cases}$



$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 36t^2 - 34,2t + 5,4 = 0 \quad (\Delta=36)$
 $\Rightarrow t_1 \approx 0,2 \quad t_2 \approx 0,75$

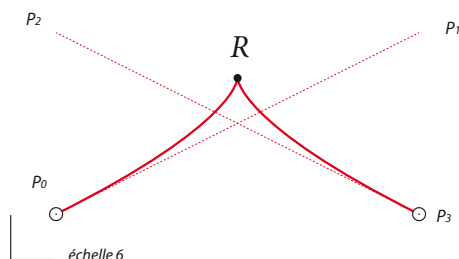
2 points d'inflexions en $I_1 \begin{vmatrix} 1,858 \\ 1,920 \end{vmatrix} \quad I_2 \begin{vmatrix} 3,222 \\ 2,336 \end{vmatrix}$

3) courbe de type 3 (avec un point de rebroussement de 1ère espèce)

\mathcal{C}_{33}

	X	Y
P_0	1	1
P_1	9	5
P_2	1	5
P_3	9	1

$\mathcal{C}_{33} \begin{cases} f(t) = 32t^3 - 48t^2 + 24t + 1 \\ g(t) = 0t^3 - 12t^2 + 12t + 1 \end{cases}$



$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 384t^2 - 384t + 96 = 0 \quad (\Delta=0)$
 $\Rightarrow t = 0,5 \quad 1 \text{ rebroussement en } R \begin{vmatrix} 5 \\ 4 \end{vmatrix}$

4) courbe de type 4 (avec un point de croisement ou point double)

\mathcal{C}_{34}

	X	Y
P_0	4	2
P_1	7	6
P_2	1	4
P_3	7	3

$\mathcal{C}_{34} \left| \begin{array}{l} f(t) = 21t^3 - 27t^2 + 9t + 4 \\ g(t) = 7t^3 - 18t^2 + 12t + 2 \end{array} \right. \quad x'y'' - y'x'' \Rightarrow 189t^2 - 189t + 54 = 0 \quad (\Delta = -5103)$

Calcul du point double $\mathcal{D} \left| \begin{array}{l} f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow x_3t_1^3 + x_2t_1^2 + x_1t_1 + x_0 = x_3t_2^3 + x_2t_2^2 + x_1t_2 + x_0 \\ g(t_1) = g(t_2) \Rightarrow y_3t_1^3 + y_2t_1^2 + y_1t_1 + y_0 = y_3t_2^3 + y_2t_2^2 + y_1t_2 + y_0 \end{array} \right.$

$f(t_1) - f(t_2) = 0 \Rightarrow x_3(t_1^3 - t_2^3) + x_2(t_1^2 - t_2^2) + x_1(t_1 - t_2) = 0$

A l'aide des identités remarquables suivantes : $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$ et $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$\Rightarrow x_3(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) + x_2(t_1 - t_2)(t_1 + t_2) + x_1(t_1 - t_2) = 0$

Donc $x_3(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + x_2(t_1 + t_2) + x_1 = 0$

A présent le but est de définir t_2 à partir de t_1 , nous allons donc faire en sorte que : $x_3 = 0$

Comme expliqué à la page 9 nous allons changer certains paramètres l'équation : $x_3(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + x_2(t_1 + t_2) + x_1 = 0$

En sachant que $\tan(\alpha) = \frac{y_3}{x_3}$ et à l'aide de la formule du changement de base, appliquons une rotation de $(\frac{\pi}{2}, \alpha)$ sur l'équation concernée.

avec : $X_2 = x_2 \sin(\alpha) - y_2 \cos(\alpha)$ et $X_1 = x_1 \sin(\alpha) - y_1 \cos(\alpha) \Rightarrow 0(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + X_2(t_1 + t_2) + X_1 = 0 \Rightarrow t_2 = -\frac{X_1}{X_2} - t_1$

Résoudre $\left\{ \begin{array}{l} x_3(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + x_2(t_1 + t_2) + x_1 = 0 \\ t_2 = -\frac{X_1}{X_2} - t_1 \end{array} \right.$ avec $G = \frac{X_1}{X_2} = \frac{x_2 \tan(\alpha) - y_2}{x_1 \tan(\alpha) - y_1} = \frac{x_1 \frac{y_3}{x_3} - y_1}{x_2 \frac{y_3}{x_3} - y_2} = \frac{x_1 y_3 - y_1 x_3}{x_2 y_3 - y_2 x_3}$

$\Rightarrow \frac{t_1^2}{G} + t_1 + G + \frac{x_1}{x_3 G} - \frac{x_2}{x_3} = 0$ ou $t_1^2 + Gt_1 + G^2 + \frac{x_1 - x_2 G}{x_3} = 0$

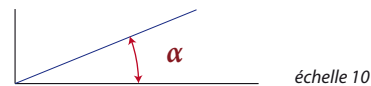
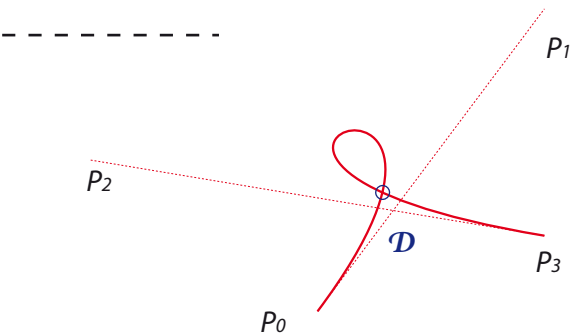
Exemple avec $\mathcal{C}_{34} \left| \begin{array}{l} f(t) = 21t^3 - 27t^2 + 9t + 4 \\ g(t) = 7t^3 - 18t^2 + 12t + 2 \end{array} \right.$

$\Rightarrow G = -1$

$\Rightarrow -t^2 + t - \frac{1}{7} = 0 \quad (\Delta = \frac{3}{7})$

$\Rightarrow t_1 \approx 0,1727 \quad t_2 \approx 0,8273$

1 point de croisement en $\mathcal{D} \left| \begin{array}{l} 4,857 \\ 3,571 \end{array} \right.$



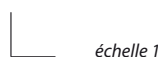
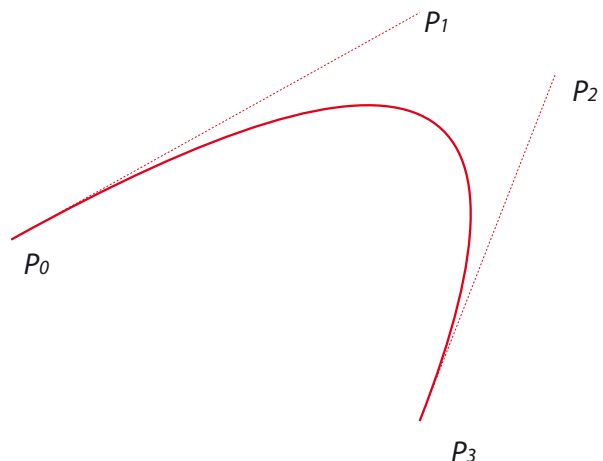
5) courbe de type 5 (arc de parabole)

Exemple \mathcal{C}_2

	X	Y
P_0	6	36
P_1	60	66
P_2	78	58
P_3	60	12

$\mathcal{C}_2 \left| \begin{array}{l} f(t) = 0t^3 - 108t^2 + 162t + 6 \\ g(t) = 0t^3 - 114t^2 + 90t + 36 \end{array} \right.$

$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 0t^2 + 0t - 2916 = 0$



Subdivisions récursives d'une B2 avec la méthode de "De Casteljaou" [1]

Cette méthode permet de calculer les coordonnées d'un point $M(t)$ sans passer par les équations de Bézier

Les points $A_0 A_1 A_2$ définissent la courbe \mathcal{C}_2
 et M un point de cette courbe de paramètre $t = 0,4$

$$Q_1 = (1-t)A_0 + t A_1 \quad \text{ou} \quad t(A_1 - A_0) + A_0$$

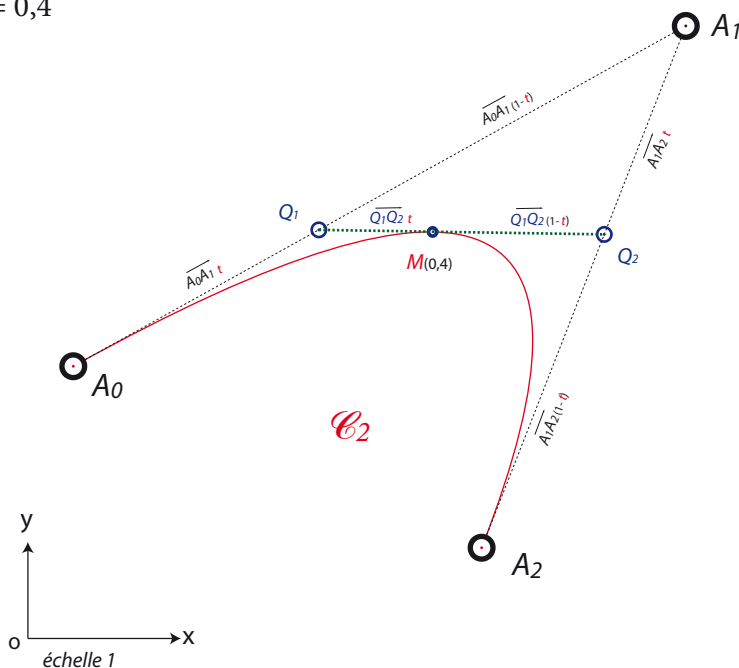
$$Q_2 = (1-t)A_1 + t A_2 \quad \text{ou} \quad t(A_2 - A_1) + A_1$$

$$M = (1-t)Q_1 + t Q_2 \quad \text{ou} \quad t(Q_2 - Q_1) + Q_1$$

\mathcal{C}_2	X	Y
A_0	6	36
A_1	87	81
A_2	60	12

donc avec $t = 0,4$

	X	Y
Q_1	38,4	54
Q_2	76,2	53,4
M	53,52	53,76



Subdivisions récursives d'une B3

Les points $P_0 P_1 P_2 P_3$ sont les points de définitions de \mathcal{C}_3
 et M un point de cette courbe de paramètre $t = 0.4$

$$Q_1 = (1-t)P_0 + t P_1$$

$$Q_2 = (1-t)P_1 + t P_2$$

$$Q_3 = (1-t)P_2 + t P_3$$

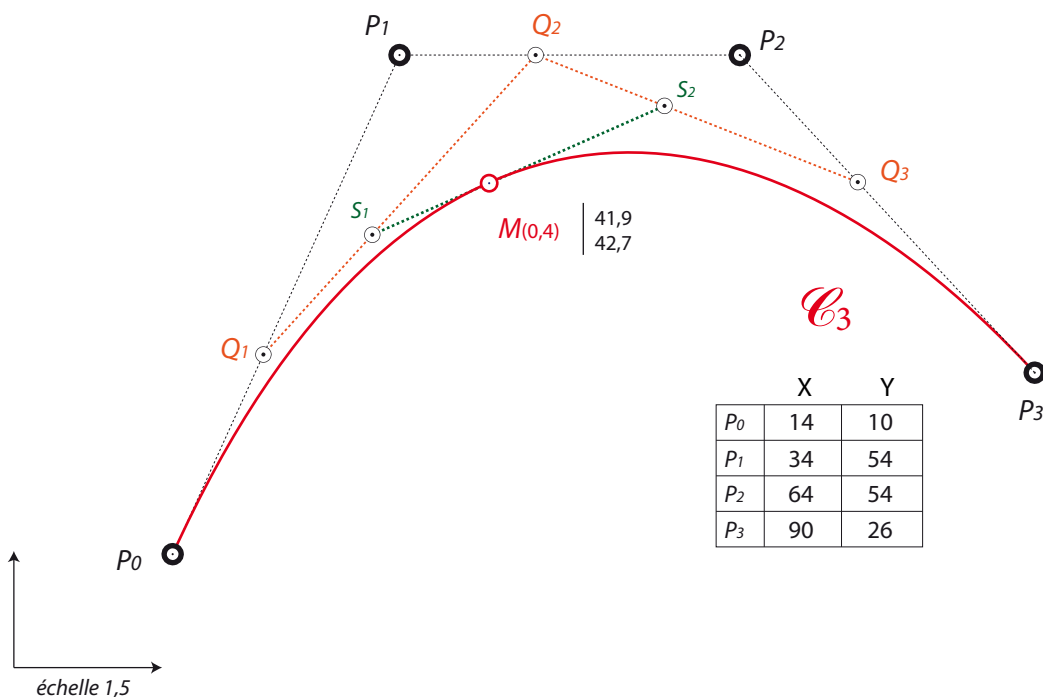
$$S_1 = (1-t)Q_1 + t Q_2$$

$$S_2 = (1-t)Q_2 + t Q_3$$

$$M = (1-t)S_1 + t S_2$$

donc avec $t = 0.4$

	X	Y
Q_1	22	27,6
Q_2	46	54
Q_3	74,4	42,8
S_1	31,6	38,2
S_2	57,4	49,5
M	41,9	42,7



	X	Y
P_0	14	10
P_1	34	54
P_2	64	54
P_3	90	26

Et de ce fait nous pouvons diviser la courbe \mathcal{C}_3 en $M_{(0,4)} \Rightarrow 2$ courbes définies par :
 \mathcal{C}_{3a} $P_0 Q_1 S_1 M$
 \mathcal{C}_{3b} $M S_2 Q_3 P_3$

Quelques applications pour une B_3

Méthode pour subdiviser une B_3 en un point $M(t)$

Exemple avec \mathcal{C}_3 et un point de subdivision M de paramètre $t = 0,4$

\mathcal{C}_3

	X	Y
P_0	14	10
P_1	34	54
P_2	64	54
P_3	90	26

$$A_0 = P_0$$

$$A_1 = t(P_1 - P_0) + P_0$$

$$A_2 = t[t(P_2 - P_1) + P_1 - A_1] + A_1$$

$$A_3 = M(t)$$

avec $t = 0,4$

$$B_0 = M(t)$$

$$B_1 = (1-t)[t(P_2 - P_1) + P_1 - B_2] + B_2$$

$$B_2 = t(P_3 - P_2) + P_2$$

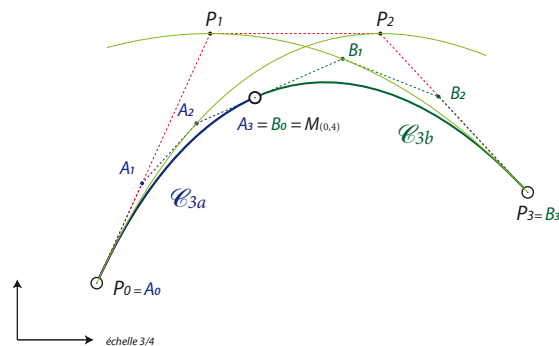
$$B_3 = P_3$$

\mathcal{C}_{3a}

	X	Y
A_0	14	10
A_1	22	27,6
A_2	31,6	38,160
A_3	41,904	42,704

\mathcal{C}_{3b}

	X	Y
B_0	41,904	42,704
B_1	57,360	49,552
B_2	74,4	42,8
B_3	90	26



Remarquons que A_2 est sur la parabole définie par $P_0P_1P_2$ et B_1 sur $P_1P_2P_3$

Méthode pour prolonger une B_3 jusqu'au point M de paramètre $t > 1$

Exemple avec \mathcal{C}_{3a} et $t = 2$

\mathcal{C}_{3a}

	X	Y
A_0	14	10
A_1	22	27,6
A_2	31,6	38,160
A_3	41,904	42,704

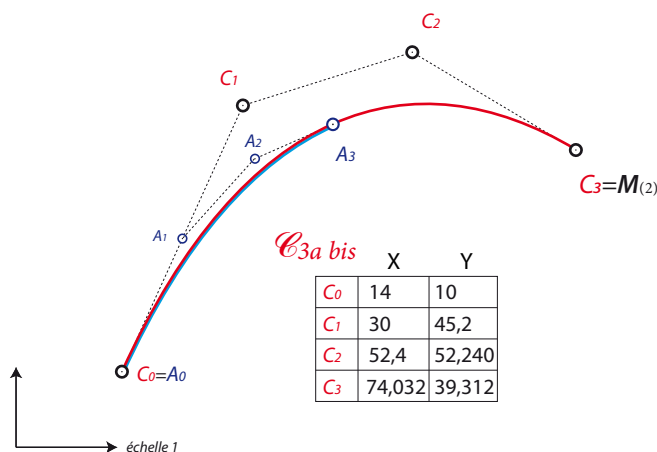
t de $M = 2$ donc $M(2) \left| \begin{array}{l} 74,032 \\ 39,312 \end{array} \right.$

$$C_0 = A_0$$

$$C_1 = t(A_1 - A_0) + A_0$$

$$C_2 = (1-t)C_1 + t(1-t)A_1 + t^2A_2$$

$$C_3 = M(t)$$



\mathcal{C}_{3a} bis

	X	Y
C_0	14	10
C_1	30	45,2
C_2	52,4	52,240
C_3	74,032	39,312

Méthode pour prolonger une B_3 jusqu'au point M de paramètre $t < 0$

Exemple avec \mathcal{C}_3 et $t = -0,2$

\mathcal{C}_3

	X	Y
P_0	14	10
P_1	34	54
P_2	64	54
P_3	90	26

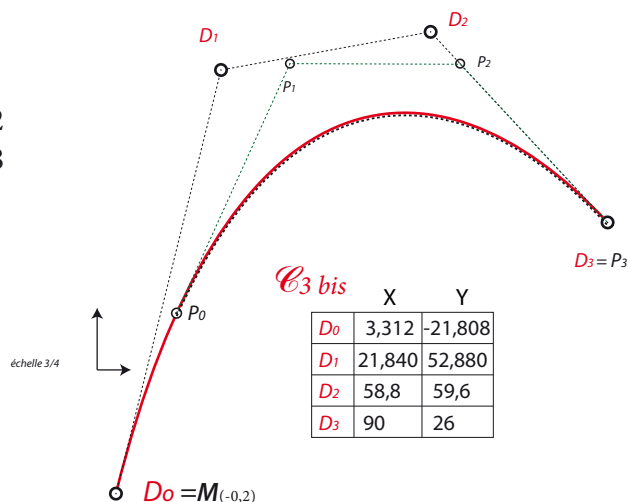
t de $M = -0,2$ donc $M(-0,2) \left| \begin{array}{l} 3,312 \\ -21,808 \end{array} \right.$

$$D_0 = M(t)$$

$$D_1 = (1-t)^2P_1 + t(1-t)P_2 + tD_2$$

$$D_2 = t(P_3 - P_2) + P_2$$

$$D_3 = P_3$$



\mathcal{C}_3 bis

	X	Y
D_0	3,312	-21,808
D_1	21,840	52,880
D_2	58,8	59,6
D_3	90	26

La subdivision De Casteljau permet de fusionner ces 2 courbes simplement .

Exemple 1 : soit 2 courbes \mathcal{Q} et \mathcal{B} ayant un raccordement de classe C^1 ($\mathcal{Q}'(A_3) = \mathcal{B}'(B_0)$) *

\mathcal{Q}	X	Y
A_0	8	18
A_1	25	30
A_2	40	35
A_3	56	35

$$\mathcal{Q} \begin{cases} x = f(t) = 3t^3 - 6t^2 + 51t + 8 \\ y = g(t) = 2t^3 - 21t^2 + 36t + 18 \end{cases}$$

\mathcal{B}	X	Y
B_0	56	35
B_1	72	35
B_2	92	30
B_3	104	14

$$\mathcal{B} \begin{cases} x = f(t) = -12t^3 + 12t^2 + 48t + 56 \\ y = g(t) = -6t^3 - 15t^2 + 0t + 35 \end{cases}$$

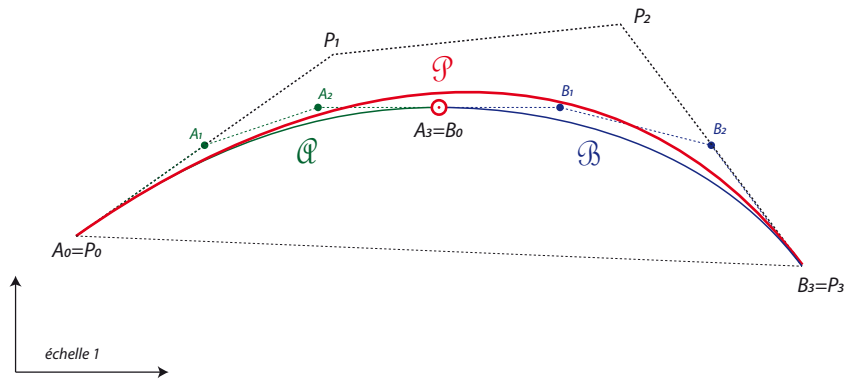
nous pouvons «naïvement» fusionner \mathcal{Q} et \mathcal{B} avec : $t_{estimé} = \frac{\|A_2A_3\|}{\|A_2A_3\| + \|B_0B_1\|} = 0,5$

$$A_1 = t(P_1 - A_0) + A_0 \Rightarrow P_1 = \frac{A_1 - A_0(1-t)}{t}$$

$$B_2 = t(B_3 - P_2) + P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{B_2 - tB_3}{(1-t)}$$

\mathcal{P}	X	Y
P_0	8	18
P_1	42	42
P_2	80	46
P_3	104	14

$$\mathcal{P} \begin{cases} x = f(t) = -18t^3 + 12t^2 + 102t + 8 \\ y = g(t) = -16t^3 - 60t^2 + 72t + 18 \end{cases}$$

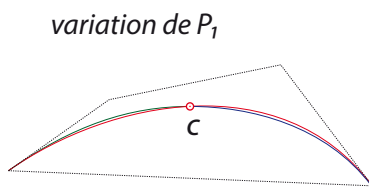


NB : cette méthode respecte les tangentes en P_0 et P_3 mais \mathcal{P} ne passe pas par A_3 et B_3 .

Nous verrons à la section « courbe passant strictement par 3 points », page 29, qu'il est possible de faire varier P_1 ou P_2 , afin que \mathcal{P}_{bis} passe par la connexion C tout en conservant les tangentes en P_0 et P_3 (voir ci dessous).

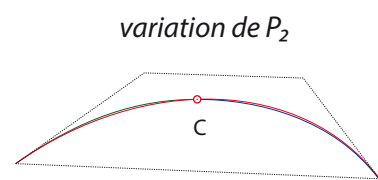
\mathcal{P}_a	X	Y
P_0	8	18
P_1	34,61	36,78
P_2	80	46
P_3	104	14

t de C $\approx 0,4907912$



\mathcal{P}_b	X	Y
P_0	8	18
P_1	42	42
P_2	84,02	40,64
P_3	104	14

t de C $\approx 0,4496878$



Exemple 2 : idem Exemple 1 mais avec un raccordement de classe C^0 ($\mathcal{Q}'(A_3) \neq \mathcal{B}'(B_0)$) *

\mathcal{Q}_1	X	Y
A_0	8	18
A_1	25	30
A_2	40	40
A_3	56	35

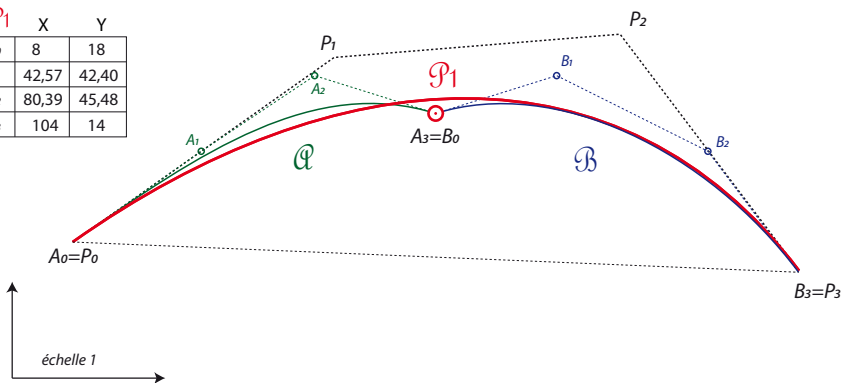
+

\mathcal{B}_1	X	Y
B_0	56	35
B_1	72	40
B_2	92	30
B_3	104	14

=>

\mathcal{P}_1	X	Y
P_0	8	18
P_1	42,57	42,40
P_2	80,39	45,48
P_3	104	14

$$t_{estimé} = \frac{\|A_2A_3\|}{\|A_2A_3\| + \|B_0B_1\|} = 0,5$$



*soit 2 courbes A et B liées en un point C.

A' =dérivée première en C, A'' =dérivée seconde en C B' =dérivée première en C, B'' =dérivée seconde en C

un raccordement de classe 0 (C^0) veut dire que $A' \neq B'$

un raccordement de classe 1 (C^1) veut dire que $A' = B'$

un raccordement de classe 2 (C^2) veut dire que $A' = B'$ et $A'' = B''$

Distance d'un point à une B₃

Après un lissage, ajustement d'une suite de points M par une B_3 il est utile d'analyser statistiquement

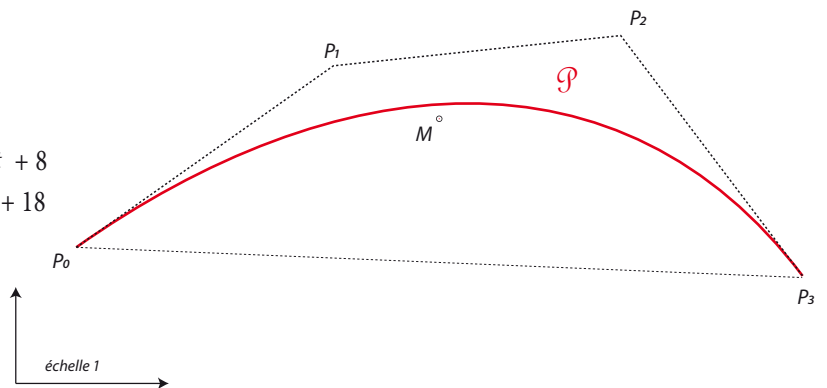
les écarts de ces points avec la B_3 calculée \mathcal{P} et déterminer l'Ecart Quadratique Moyen du lissage (EQM)*

Le but est de calculer la plus petite distance de M par rapport à \mathcal{P} .

Exemple 3 : avec la courbe \mathcal{P} et un point M $\begin{matrix} 56 \\ 35 \end{matrix}$

\mathcal{P}	X	Y
P_0	8	18
P_1	42	42
P_2	80	46
P_3	104	14

$$\mathcal{P} \begin{cases} x = f(t) = -18t^3 + 12t^2 + 102t + 8 \\ y = g(t) = -16t^3 - 60t^2 + 72t + 18 \end{cases}$$

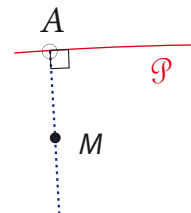


Il faut donc définir le point $A \in \mathcal{P}$ (le vecteur normal en A doit passer par M)

Déterminons les équations pour résoudre le problème.

Le coefficient directeur du vecteur normal en $A(t)$ est : $-\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{y_M - y_{A(t)}}{x_M - x_{A(t)}}$

Nous pouvons donc poser : $-\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{y_M - g(t)}{x_M - f(t)} \Rightarrow f'(t)(f(t) - x_M) + g'(t)(g(t) - y_M) = 0$



En utilisant la définition canonique d'une B₃

$$\Rightarrow (3x_3t^2 + 2x_2t + x_1)(x_3t^3 + x_2t^2 + x_1t + x_0 - x_M) + (3y_3t^2 + 2y_2t + y_1)(y_3t^3 + y_2t^2 + y_1t + y_0 - y_M) = 0$$

Après développement

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(t) = & 3(x_3^2 + y_3^2)t^5 + 5(x_3x_2 + y_3y_2)t^4 + [2(x_2^2 + y_2^2) + 4(x_3x_1 + y_3y_1)]t^3 \\ & + [3(x_2x_1 + y_2y_1 + x_3(y_0 - y_M) + y_3(x_0 - x_M))]t^2 \\ & + [x_1^2 + y_1^2 + 2x_2(x_0 - x_M) + 2y_2(y_0 - y_M)]t + x_1(x_0 - x_M) + y_1(y_0 - y_M) \end{aligned}$$

selon l'exemple \Rightarrow $h(t) = 1740t^5 + 3720t^4 - 4464t^3 - 5880t^2 + 16476t - 6120$
 $h'(t) = 8700t^4 + 14880t^3 - 13392t^2 - 11760t + 16476$

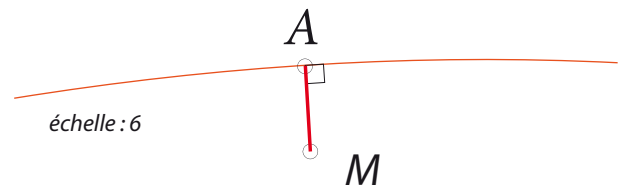
Et en résolvant $h(t)=0$ par la méthode de Raphson Newton^[5] $\Rightarrow t_{(A)} \approx 0,4617252$ $A \approx \begin{matrix} 55,882 \\ 36,878 \end{matrix}$

donc $\|\overline{MA}\| \approx 1,882 = \text{écart}$

NB : la dichotomie peut ou doit commencer avec un t estimé.

Soit dans ce cas $\Rightarrow t_{\text{estimé}} = \frac{\|\overline{P_0M}\|}{\|\overline{P_0P_3}\|} = 0,52997$

Dans notre exemple il existe une seule solution sur l'intervalle [0 1]



$$*\text{EQM} = \frac{\sum_1^n (\text{écart}_{(n)}^2)}{n} = \text{MSE}$$

Rayon de courbure (cercle osculateur)

exemple avec :

\mathcal{C}_3	X	Y
P_0	14	10
P_1	34	54
P_2	64	54
P_3	90	26

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = -14t^3 + 30t^2 + 60t + 14 \\ y = g(t) = 16t^3 - 132t^2 + 132t + 10 \end{cases}$$

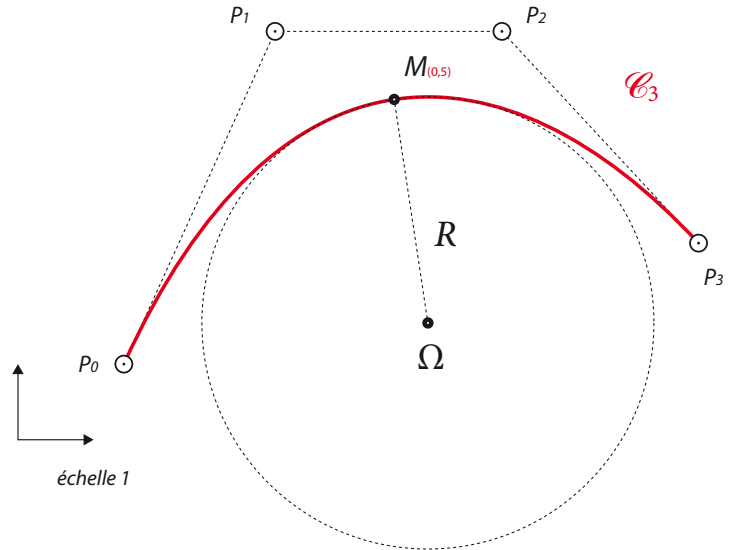
Calcul du rayon de courbure R relatif à un point $M(t)$ *

$$R \text{ en } M(t) = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}$$

$$\text{avec } M'_{(0,5)} \begin{cases} x' = f'_{(0,5)} = 79,5 \\ y' = g'_{(0,5)} = 12 \end{cases}$$

$$\text{et } M''_{(0,5)} \begin{cases} x'' = f''_{(0,5)} = 18 \\ y'' = g''_{(0,5)} = -216 \end{cases}$$

$$R \text{ en } M_{(0,5)} = \frac{519729,318}{-17388} \approx -29,890$$



NB : si au point $M(t)$ $x'y'' - y'x'' < 0$ la courbe est concave en ce point, sinon elle est convexe [4]

⚠ si le paramètre t correspond à un point d'inflexion ou de rebroussement le rayon R sera indéfini car $x'y'' - y'x'' = 0$

Calcul du centre de courbure Ω

Dans le système de coordonnées de Serret - Frenet * en $M_{(0,5)} \begin{cases} 49,75 \\ 45 \end{cases}$

$$\text{nous avons } \vec{N} \begin{cases} \frac{(-y')}{(x'^2 + y'^2)^{0,5}} = \frac{-12}{80,4} \approx -0,1493 \\ \frac{(x')}{(x'^2 + y'^2)^{0,5}} = \frac{79,5}{80,4} \approx 0,9887 \end{cases}$$

$$\Omega_{(t)} \begin{cases} (xN)(R) + xM_{(t)} \\ (yN)(R) + yM_{(t)} \end{cases} \quad \Omega_{(0,5)} \begin{cases} \frac{(-y')(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{(x'y'' - y'x'')(x'^2 + y'^2)^{1/2}} + xM_{(0,5)} \approx 54,211 \\ \frac{(x')(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{(x'y'' - y'x'')(x'^2 + y'^2)^{1/2}} + yM_{(0,5)} \approx 15,445 \end{cases}$$

$$\text{Donc } x \Omega_{(t)} = \frac{(-y')(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} + xM_{(t)} \quad y \Omega_{(t)} = \frac{(x')(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} + yM_{(t)}$$

* http://prof.math.free.fr/textes/cours/normal/courbure_html/index.html

Paramétrisation d'une fonction du troisième degré sur un intervalle borné.

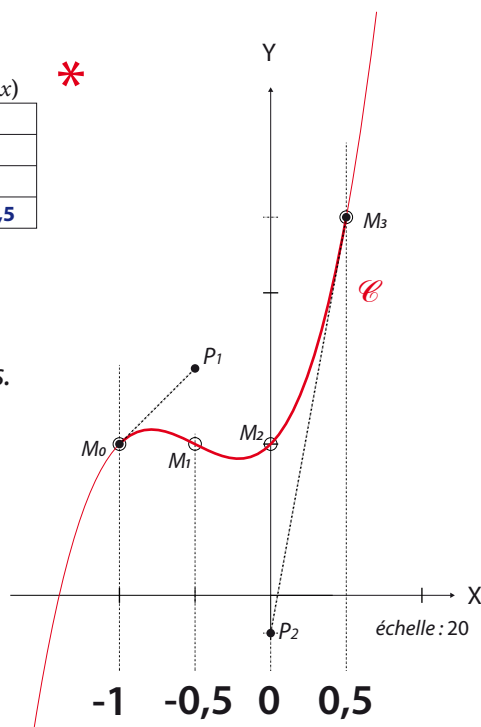
Soit la fonction : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1x + 1$ que l'on veut paramétriser sur l'intervalle $[-1, 0,5]$

a) pour commencer choisir 4 points de la courbe \mathcal{C}

M_0 est au début de l'intervalle
 M_1, M_2 2 points intermédiaires
 M_3 est la fin de l'intervalle

$\Rightarrow \vec{OM}(t)$

	x	f(x)
M_0	-1	1
M_1	-0,5	1
M_2	0	1
M_3	0,5	2,5



b) Calculer les paramètres t en M_0, M_1, M_2, M_3

Dans ce cas là le calcul est simple car t est proportionnel aux abscisses.

t en $M_0 = 0$, t en $M_3 = 1$

$$t \text{ en } M_1 = \frac{xM_1 - xM_0}{xM_3 - xM_0} = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}$$

$$t \text{ en } M_2 = \frac{xM_2 - xM_0}{xM_3 - xM_0} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$$

enfin avec :

$$\begin{matrix} t \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,33 & 0,11 & 0,037 \\ 1 & 0,67 & 0,44 & 0,296 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{matrice de passage} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \begin{bmatrix} xP_0 & yP_0 \\ xP_1 & yP_1 \\ xP_2 & yP_2 \\ xP_3 & yP_3 \end{bmatrix} \\ \vec{OP} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} xM(t) & yM(t) \\ -1 & 1 \\ -0,5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0,5 & 2,5 \end{bmatrix} \\ \vec{OM}(t) \end{matrix} *$$

$$\vec{OP} = [\mathcal{I}_n \times \mathcal{M}_3]^{-1} \times \vec{OM}(t) = \begin{matrix} \mathcal{C} \\ \begin{matrix} X & Y \\ P_0 & -1 & 1 \\ P_1 & -0,5 & 1,5 \\ P_2 & 0 & -0,25 \\ P_3 & 0,5 & 2,5 \end{matrix} \end{matrix} \quad \mathcal{C} \text{ est une } B_3 \text{ de type 1.}$$

*

La **réciroque** est possible par une interpolation polynomiale de type : Hermite, Lagrange, Newton, Vandermonde...

Exemple avec la matrice de **Vandermonde** :

$$\begin{matrix} \mathcal{C} = \text{les coefficients du polynôme} \\ \mathcal{F} = \text{les images } f(x_n) \text{ du polynôme} \\ n = \text{le nombre de points} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \\ \mathcal{V} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\ \mathcal{C} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \\ \mathcal{F} \end{matrix}$$

Avec $n = 4$

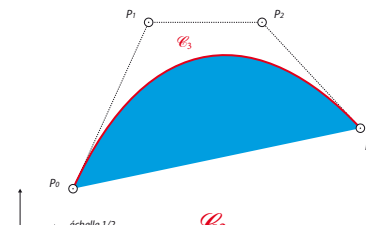
$$\begin{matrix} \begin{matrix} x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -0,5 & 0,25 & -0,125 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,25 & 0,125 \end{pmatrix} \\ \mathcal{V} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ \mathcal{C} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2,5 \end{pmatrix} \\ \mathcal{F} \end{matrix} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{V}^{-1} \times \mathcal{F} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \mathcal{C} \end{matrix}$$

Aire d'une B₃

a) Aire d'une B₃ fermée (méthode WEB).

En posant exceptionnellement: $X_0 = xP_0, Y_0 = yP_0$; $X_1 = xP_1, Y_1 = yP_1$ etc...

$$\text{formule de l'aire} = \frac{3}{20} [(Y_1 - Y_0)(X_2 + X_3 - 2X_0) - (X_1 - X_0)(Y_2 + Y_3 - 2Y_0) - 2 [X_0(Y_2 - Y_3) + Y_0(X_3 - X_2) + Y_3X_2 - Y_2X_3]]$$



P ₀	14	10
P ₁	34	54
P ₂	64	54
P ₃	90	26

Dans cet exemple, aire de C₃ = 1414,8 mm²

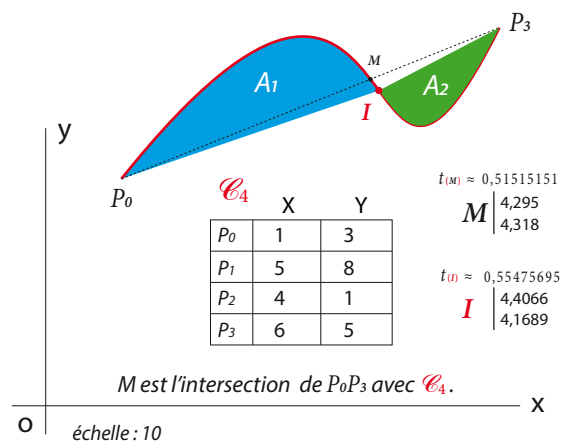
b) Aire d'une B₃ fermée acceptant un point d'inflexion sur]0 1[

L'aire de C₄ = 1,2 mm² ?? **Non !! le résultat est faux**

car le point M ne coïncide pas avec le point d'inflexion I.

Donc la formule ne s'applique que pour des B₃ continues sur]0 1[sans points stationnaires ou de croisement sur]0 1[.

Généralement, si 1 ou 2 points stationnaires sont sur]0 1[il faut subdiviser la courbe en 2 ou 3 parties. Puis additionner les aires correspondantes.



P _i	X	Y
P ₀	1	3
P ₁	5	8
P ₂	4	1
P ₃	6	5

$t_M \approx 0,51515151$
M | 4,295
4,318

$t_I \approx 0,55475695$
I | 4,4066
4,1689

M est l'intersection de P₀P₃ avec C₄.

Dans notre exemple Il est nécessaire de scinder la courbe en 2 parties: A₁ et A₂

A ₁ aire ≈ 2,4958			A ₂ aire ≈ -0,8116		
P ₀	1	3	P ₀	4,4066	4,1689
P ₁	3,2190	5,7738	P ₁	4,8138	3,6187
P ₂	3,8993	4,8545	P ₂	5,1095	3,2190
P ₃	4,4066	4,1689	P ₃	6	5

Donc l'aire vraie de C₄ = 2,4958 - 0,8116 = 1,6842 mm²

NB: constatons que si une courbe est concave son aire est positive, sinon elle est convexe et négative

c) Aire d'une B₃ sur un intervalle [a b].

NB: a est le paramètre t du début de l'intervalle et b celui de la fin.

En utilisant la formule: aire = $\int_a^b (g(t)f'(t))$ et la définition canonique d'une B₃ $M(t) \begin{cases} x = f(t) = x_3t^3 + x_2t^2 + x_1t + x_0 \\ y = g(t) = y_3t^3 + y_2t^2 + y_1t + y_0 \end{cases}$

$$g(t)f'(t) = h(t) = 3x_3y_3t^5 + (3x_3y_2 + 2x_2y_3)t^4 + (3x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_3)t^3 + (3x_3y_0 + 2x_2y_1 + x_1y_2)t^2 + (2x_2y_0 + x_1y_1)t + x_3y_0$$

$$H(t) = \frac{3x_3y_3t^6}{6} + \frac{(3x_3y_2 + 2x_2y_3)t^5}{5} + \frac{(3x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_3)t^4}{4} + \frac{(3x_3y_0 + 2x_2y_1 + x_1y_2)t^3}{3} + \frac{(2x_2y_0 + x_1y_1)t^2}{2} + \frac{x_3y_0t}{1} + C$$

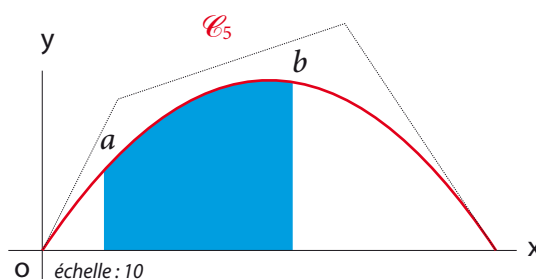
Dans cet exemple:

$$f(t) = -3t^3 + 6t^2 + 3t + 0 \quad f'(t) = -9t^2 + 12t + 3$$

$$g(t) = -3t^3 - 3t^2 + 6t + 0$$

$$h(t) = 27t^5 - 9t^4 - 99t^3 + 63t^2 + 18t + 0$$

$$H(t) = 4,5t^6 - 1,8t^5 - 24,75t^4 + 21t^3 + 9t^2 + C$$



P _i	X	Y
P ₀	0	0
P ₁	1	2
P ₂	4	3
P ₃	6	0

L'aire de C₅ sur l'intervalle [0,2 0,6] = H(0,6) - H(0,2) ≈ 4,15027 mm²

NB: POP3 doit être sur l'axe OX
L'intervalle [a b] doit être continu

Abscisse curviligne S (longueur) d'une B_3

La théorie veut que la longueur d'une courbe paramétrique = $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

Pour une B_3 $S = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} = \int_a^b \sqrt{(3x_3t^2 + 2x_2t + x_1)^2 + (3y_3t^2 + 2y_2t + y_1)^2}$

NB : les variables a et b sont les valeurs des paramètres t

Mais dans la pratique nous ne pouvons pas développer cette intégrale .

Par contre, via une **approximation**, il est possible d'estimer convenablement cette longueur.

Pour ma part je divise la courbe en 100 parties sur l'intervalle $[a \ b]$ avec un pas de $(b-a) / 100$.

Je calcule les coordonnées des points M correspondants allant de M_0 à M_{100} .

Je détermine le centre du cercle passant par $M_0 M_1 M_2$

Je peut donc calculer son rayon, son angle au centre θ et enfin la longueur de l'arc .

Ainsi de suite avec $M_2 M_3 M_4$, $M_4 M_5 M_6$, etc... jusque $M_{98} M_{99} M_{100}$ je peut estimer S

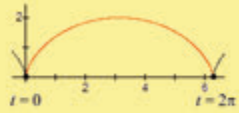
Exemple avec \mathcal{C}_3 sur l'intervalle $[0,2 \ 0,6]$ \Rightarrow pas = $(0,6 - 0,2) / 100 = 0,004$

Donc S de \mathcal{C}_3 sur $[0,2 \ 0,6]$ $\approx 2,705$ mm

t	n	xM	yM	xC	yC	corde	rayon	θ	Lg, arc
0,200	0	0,8160	1,0560	3,15	-1,60	0,05	3,53	0,015 rad	0,05
0,204	1	0,8362	1,0737						
0,208	2	0,8566	1,0912						
0,212	3	0,8771	1,1086						
0,216	4	0,8977	1,1258	3,15	-1,59	0,05	3,53	0,015 rad	0,05
⋮	⋮	⋮	⋮						
⋮	⋮	⋮	⋮						
⋮	⋮	⋮	⋮						
0,584	96	3,2008	1,8833	2,96	-1,07	0,06	2,97	0,019 rad	0,06
0,588	97	3,2286	1,8809						
0,592	98	3,2564	1,8782						
0,596	99	3,2842	1,8752						
0,600	100	3,3120	1,8720	2,96	-1,08	0,06	2,97	0,019 rad	0,06
⋮	⋮	⋮	⋮						
⋮	⋮	⋮	⋮						
⋮	⋮	⋮	⋮						

Exemple d'une paramétrique pour vérifier la précision de la méthode ci-dessus

Find the length of the arc in one period of the cycloid $x = r - r \sin t, y = r - r \cos t$. The values of t run from 0 to 2π .



Arc length = $\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + 1} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt \quad \text{using the identity } \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{2}$$

$$= \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt \quad \text{since } \sin \frac{t}{2} \geq 0 \text{ when } 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$= -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi}$$

$$= (-4 \cos \pi) - (-4 \cos 0)$$

$$= 4 + 4 \quad \text{longueur vraie} = 8$$

avec l'approximation: $S \approx 8,0000007976$

Simulation d'un arc de cercle par une B3

	X	Y
M1	1	1,5
M2	4	6
M3	8	7
A	2,5	3,75
B	6	6,5

NB : pour avoir une bonne précision l'angle au centre θ de l'arc doit être $\leq 90^\circ$

1) Calculs pour définir le cercle passant par $M_1 M_2 M_3$.

Le centre Ω de ce cercle est déterminé par
l'intersection des médiatrices de : $\overline{M_1M_2}$ et $\overline{M_2M_3}$

définition des coordonnées de A et B

$$x_A = \frac{(x_{M_1} + x_{M_2})}{2} \quad y_A = \frac{(y_{M_1} + y_{M_2})}{2} \quad \dots \text{similairement pour B}$$

calculs des coefficients directeurs de : α, β

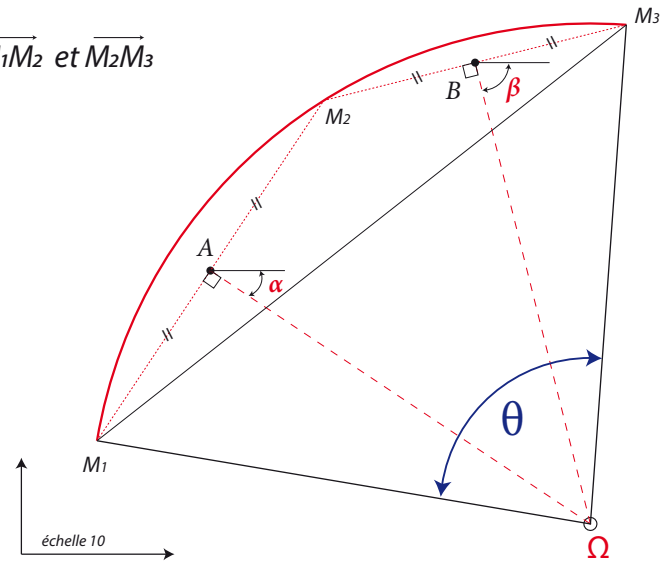
$$\tan(\alpha) = -\frac{(x_{M_2} - x_{M_1})}{(y_{M_2} - y_{M_1})} \quad \tan(\beta) = -\frac{(x_{M_3} - x_{M_2})}{(y_{M_3} - y_{M_2})}$$

donc avec la méthode de **Delambre** (voir page 37)

l'intersection $\Rightarrow x_\Omega = 7,525 \quad y_\Omega = 0,4$



si $y_{(M_1)} = y_{(M_2)}$ alors $x_\Omega = x_A$, $y_\Omega = \tan(\beta) (x_A - x_B) + y_B$
 si $y_{(M_2)} = y_{(M_3)}$ alors $x_\Omega = x_B$, $y_\Omega = \tan(\alpha) (x_B - x_A) + y_A$
 si $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$ alors les points M sont colinéaires



$$\Rightarrow \text{rayon } R = \|\overrightarrow{M_1\Omega}\| \approx 6,617 \quad \text{corde } C = \|\overrightarrow{M_1M_3}\| \approx 8,902 \quad \Rightarrow \theta = 2 \arcsin\left(\frac{C}{2R}\right) \approx 84,542^\circ$$

2) Calculs pour définir T

$$T = M_1 \tan(\alpha_0) \cap M_3 \tan(\alpha_3) \quad \text{avec } \tan(\alpha_0) = -\frac{(x_\Omega - x_{M_1})}{(y_\Omega - y_{M_1})} \quad \tan(\alpha_3) = -\frac{(x_\Omega - x_{M_3})}{(y_\Omega - y_{M_3})} \Rightarrow T \begin{matrix} 2 \\ 7,432 \end{matrix}$$

3) Calculs pour définir les **angles orientés*** suivants :

$$\alpha_0 = \text{Arctan}\left(\frac{y^T - y_{M_1}}{x^T - x_{M_1}}\right) \approx 80,431^\circ \quad \alpha_3 = \text{Arctan}\left(\frac{y^T - y_{M_3}}{x^T - x_{M_3}}\right) + 180^\circ \approx -4,116 + 180 \approx 175,884^\circ$$

4) Calculs pour définir la B3

Astuce : ne connaissant pas le paramètre t de M_2 il faut définir le point M_2'

qui doit être sur la bissectrice de $\widehat{M_1\Omega M_3}$, ainsi t de $M_2' = 0,5$

$$\Rightarrow x_{M_2'} = \Delta x_{(\Omega T)} \left(\frac{R}{\|\Omega T\|}\right) + x_\Omega \approx 3,437 \quad y_{M_2'} = \Delta y_{(\Omega T)} \left(\frac{R}{\|\Omega T\|}\right) + y_\Omega \approx 5,603 \quad \begin{matrix} (\Delta x_{(\Omega T)} = x^T - x_\Omega \\ \Delta y_{(\Omega T)} = y^T - y_\Omega \end{matrix}$$

avec

Pts	X	Y
M1	1	1,5
M2'	3,437	5,603
M3	8	7
T	2	7,432

Polynôme de Bernstein avec $t=0,5$

B0	B1	B2	B3
$(1-t)^3$	$3t(1-t)^2$	$3t^2(1-t)$	t^3
0,125	0,375	0,375	0,125

résoudre $\begin{cases} x_{M_2'} = B_0 x_{P_0} + B_1 (\varphi_0 \cos(\alpha_0) + x_{P_0}) + B_2 (\varphi_3 \cos(\alpha_3) + x_{P_3}) + B_3 x_{P_3} \\ \varphi = \varphi_0 = \varphi_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_0 = \varphi_3 = \frac{x_{M_2'} - 0,5 (x_{P_0} + x_{P_3})}{0,375 [\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha_3)]} \approx 3,410940045$$

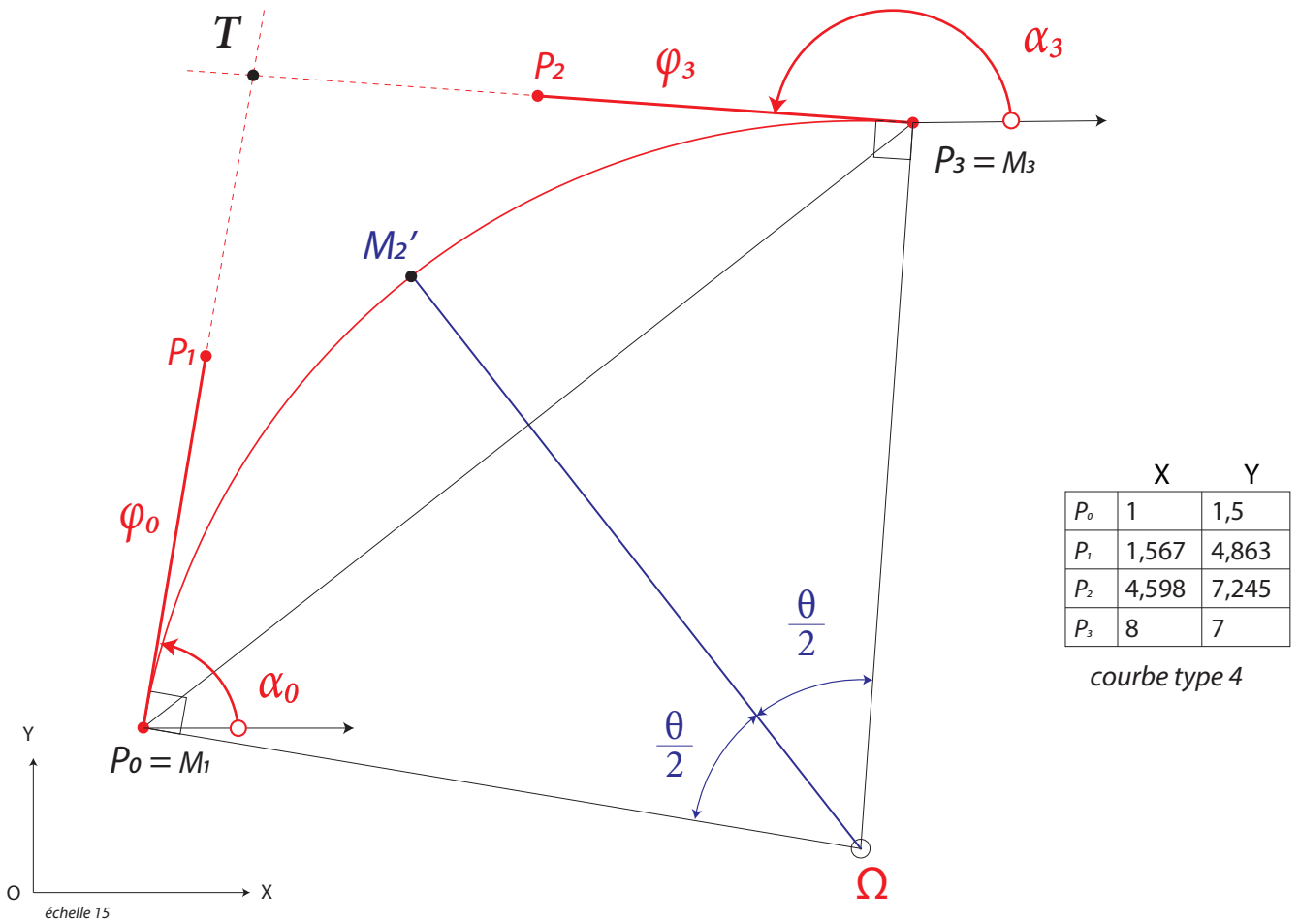
Enfin

$$x_{P_1} = x_{M_1} + \varphi_0 \cos(\alpha_0) \approx 1,567 \quad x_{P_2} = x_{M_3} + \varphi_3 \cos(\alpha_3) \approx 4,598$$

$$y_{P_1} = y_{M_1} + \varphi_0 \sin(\alpha_0) \approx 4,863 \quad y_{P_2} = y_{M_3} + \varphi_3 \sin(\alpha_3) \approx 7,245$$

	X	Y
P0	1	1,5
P1	1,567	4,863
P2	4,598	7,245
P3	8	7

* pour en savoir plus sur les angles orientés et coordonnées polaires voir pages 38 , 39



Voici 3 autres méthodes de calcul de φ

a) Mr. D. Krauss avec: $S = \sin(\theta)$, $C = \cos(\theta)$, $K_0 = \frac{1}{3} [-S + \sqrt{S^2 + 6(1-C)}]$, $K_1 = \frac{4}{3} \tan(\frac{\theta}{4})$
 $\alpha = 6(3K_0 + S)$, $\beta = 9(1-C)K_1 + 12S$, $x = -0,118433799202707$, $K_{idéal} = \frac{\beta K_1 - \alpha x K_0}{\beta - \alpha x}$
 $\varphi = K_{idéal} \times Rayon \approx 3,652064764$

b) Mr. Thomas W. Sederberg $\varphi = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{1 + 2 \cos \frac{\theta}{2}} \times Rayon \approx 3,876190288$
 c) https://pomax.github.io/bezierinfo/#circles_cubic $\varphi = \frac{4}{3} \tan(\frac{\theta}{4}) \times Rayon \approx 3,410940045$

Tableau comparatif

	Rayon = 10 $\theta = 90^\circ$			
t	ΔR perso	ΔR Krauss	ΔR Sederberg	ΔR Pomax
0,1	0,0015	0,0013	0,0240	0,0015
0,2	0,0027	0,0019	0,0745	0,0027
0,3	0,0021	0,0007	0,1267	0,0021
0,4	0,0007	-0,0011	0,1642	0,0007
0,5	0,0000	-0,0020	0,1777	0,0000
φ	5,52284749831575	5,51915630759849	5,85786437628077	5,52284749830793

EMQ 0,0000029 0,0000022 0,0161408 0,0000029

La clothoïde [2]

Avant propos.

La particularité d'une clothoïde, appelée aussi spirale de «Cornu», est que son rayon de courbure est progressif.

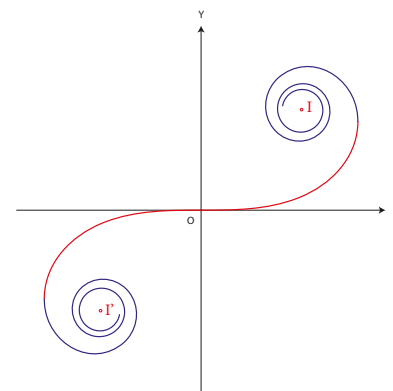
Au fur et à mesure l'on avance sur la courbe ce rayon diminue.

Dans le domaine des travaux public, le début de la clothoïde est utilisé pour raccorder des axes routiers.

La spirale permet d'aborder progressivement une partie circulaire sans changement brusque de direction.

En France, la législation impose un rayon de virage circulaire pour chaque catégorie de routes.

Par exemple pour une autoroute de catégorie L120, où la vitesse est limitée à 130 Km/h, le rayon du virage circulaire doit être \geq à 665m.



Quelques définitions mathématiques .

coordonnées de **I**: $x = y = \frac{A\sqrt{\pi}}{2}$

A est appelé paramètre de la clothoïde

Soit : **S** l'abscisse curviligne de la clothoïde

r son rayon de courbure

τ l'angle en radian d'une tangente de la courbe

L'équation intrinsèque de la spirale est : $S r = A^2$

$$\tau = \frac{s^2}{2A^2} = \frac{s}{2r}$$

Les coordonnées d'un point de la courbe sont :

$$x = \int \cos\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds \quad y = \int \sin\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds$$

Ces intégrales dites de Fresnel ne peuvent pas s'exprimer à partir de fonctions élémentaires, mais un calcul à l'aide d'un développement limité au voisinage de O est possible :

$$xM(s) = s - \frac{s^5}{40A^4} + \frac{s^9}{3456A^8} - \frac{s^{13}}{599040A^{12}} + \dots$$

$$yM(s) = \frac{s^3}{6A^2} - \frac{s^7}{336A^6} + \frac{s^{11}}{42240A^{10}} - \frac{s^{15}}{9676800A^{14}} + \dots$$

dans l'exemple 1 avec **S** = 35 et **A** = 40

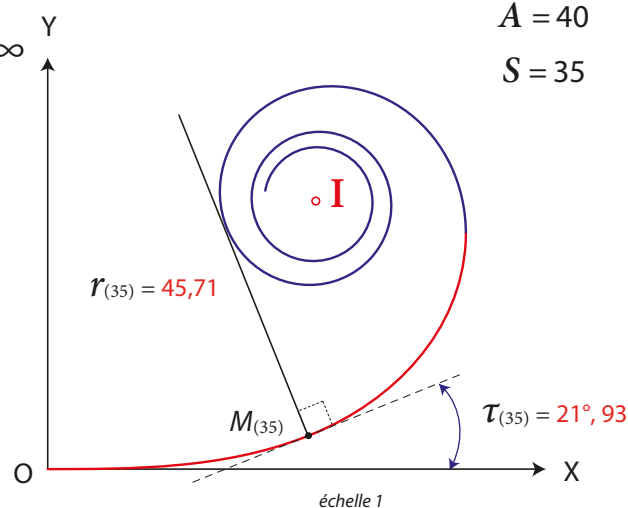
$$xM_{(35)} = 34,49$$

$$yM_{(35)} = 4,42$$

Exemple 1)

$$A = 40$$

$$S = 35$$



Simulation d'un arc de clothoïde par une B_3

Exemple 2)

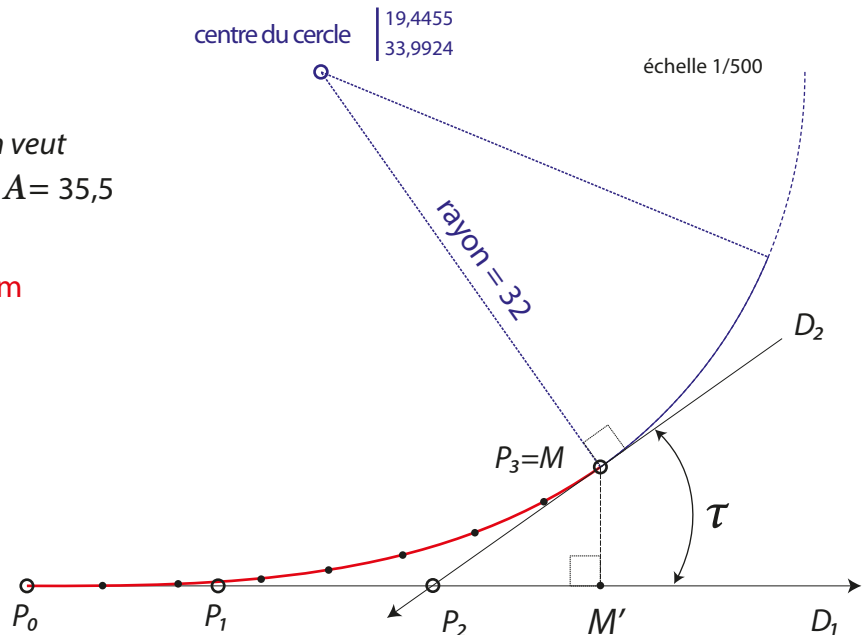
Soit un arc de cercle de rayon 32 m que l'on veut raccorder par une clothoïde de paramètre $A = 35,5$

$$s r = A^2 \text{ donc } S_{(32)} = 35,5^2/32 \approx 39,383 \text{ m}$$

$$\tau_{(39,383)} = \frac{39,383}{2 \cdot 32} \approx 35,257^\circ$$

$$xM_{(39,383)} \approx 37,9174$$

$$yM_{(39,383)} \approx 7,8623$$



Définition de la courbe de Bézier

Soit : les droites D_1 , D_2 et M' qui est le projeté orthogonal de M sur la droite D_1

P_0 est à l'origine de la clothoïde

P_1 est à $1/3$ de $\overline{P_0M'}$

P_2 est l'intersection de D_1 et D_2

P_3 est le point M

donc la courbe de Bézier \approx

	X	Y
P_0	0	0
P_1	12,639	0
P_2	26,796	0
P_3	37,917	7,862

Tableaux comparatifs

Calcul traditionnel		abscisse curviligne tous les 5 m		
param. A	35,5	rayon de l'arc de cercle à raccorder 32 m		
s	X	Y	τ	r
0,00	0,000	0,000	0,000°	infinis
5,00	5,000	0,017	0,568°	252,05
10,00	9,998	0,132	2,273°	126,03
15,00	14,988	0,446	5,115°	84,02
20,00	19,950	1,056	9,093°	63,01
25,00	24,847	2,057	14,207°	50,41
30,00	29,620	3,538	20,459°	42,01
35,00	34,182	5,575	27,847°	36,01
39,383	37,917	7,862	35,257°	32,00

approximation par la courbe de bézier				A moyen 35,6	
X	Y	écart des Y	r estimé	S estimé	A estimé
0,000	0,000	0,000	infinis		
5,000	0,017	-0,001	248,5	5,00	35,3
9,998	0,135	-0,002	128,6	10,00	35,9
14,988	0,446	0,000	86,0	15,00	35,9
19,950	1,048	0,008	63,5	20,00	35,6
24,847	2,038	0,019	49,7	25,00	35,2
29,620	3,515	0,023	40,9	30,00	35,0
34,182	5,563	0,012	35,9	35,00	35,4
37,917	7,862	0,000	34,1	39,389	36,6

Nous pouvons constater que avec un angle $\tau \approx 35^\circ$ la précision se dégrade vers la fin de la courbe.

Si $\tau \approx 20^\circ$ l'écart maxi est de 0,014 et avec $\tau \approx 40^\circ$ l'écart maxi est de 0,040.
Donc la précision diminue si τ augmente.

L'utilité de cette approximation est que la courbe de Bézier peut être calculée sur \mathbb{R}^2 .
Elle permet, par exemple, de visualiser un avant projet à petite échelle.
De vérifier le paramètre A.

Mais ATTENTION : la méthode traditionnelle fait Foi et Loi.

B2 passant strictement par 3 points

1) Les tangentes en A_0 et A_2 sont libres.

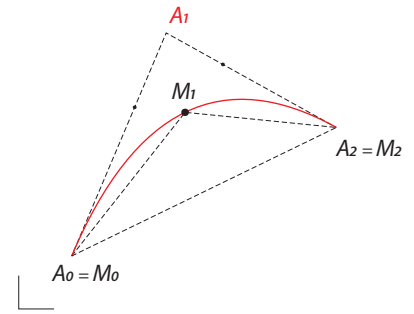
Dans ce cas il existe une infinités de solutions car tout dépend de l'estimation du paramètre t de M_1 .

soit	X	Y
$A_0 = M_0$	7	7
M_1	22	26
$A_2 = M_2$	42	24

t estimé de $M_1 = 0,5$

$$x_{A_1} = (x_{M_1} - (1-t)^2 x_{A_0} - t^2 x_{A_2}) / 2t(1-t) = 19,5$$

$$y_{A_1} = (y_{M_1} - (1-t)^2 y_{A_0} - t^2 y_{A_2}) / 2t(1-t) = 36,5$$



2) La tangente en A_0 est imposée.

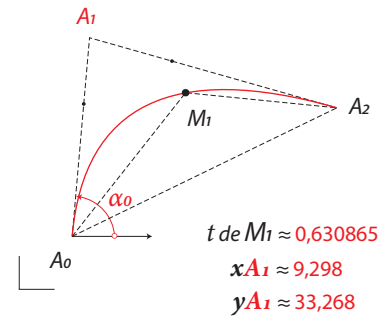
Dans ce cas il faut calculer le paramètre t de M_1

avec les mêmes points de 1) et $\alpha_0 = 85^\circ$

$$\vec{\alpha}_0 = \tan(\alpha_0)$$

$$\text{résoudre} \begin{cases} x_{M_1} = t^2 (x_{A_0} + x_{A_2} - 2x_{A_1}) + 2t (x_{A_1} - x_{A_0}) + x_{A_0} \\ y_{M_1} = t^2 (y_{A_0} + y_{A_2} - 2y_{A_1}) + 2t (y_{A_1} - y_{A_0}) + y_{A_0} \\ \tan(\alpha_0) = \vec{\alpha}_0 = \frac{y_{A_1} - y_{A_0}}{x_{A_1} - x_{A_0}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t^2 [\vec{\alpha}_0 (x_{A_0} - x_{A_2}) + y_{A_2} - y_{A_0}] + \vec{\alpha}_0 (x_{M_1} - x_{A_0}) + y_{A_0} - y_{M_1} = 0$$



t de $M_1 \approx 0,630865$

$$x_{A_1} \approx 9,298$$

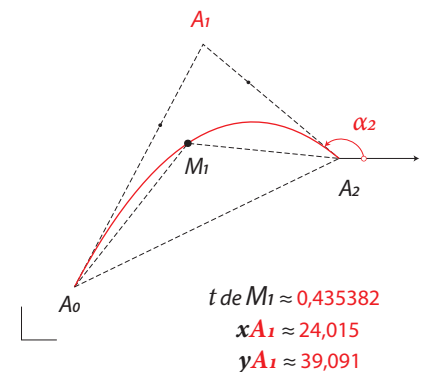
$$y_{A_1} \approx 33,268$$

3) La tangente en A_2 est imposée.

Calcul de t de M_1 avec les mêmes points de 1) et $\alpha_2 = 140^\circ$ ou -40°

$$\text{résoudre} \begin{cases} x_{M_1} = t^2 (x_{A_0} + x_{A_2} - 2x_{A_1}) + 2t (x_{A_1} - x_{A_0}) + x_{A_0} \\ y_{M_1} = t^2 (y_{A_0} + y_{A_2} - 2y_{A_1}) + 2t (y_{A_1} - y_{A_0}) + y_{A_0} \\ \vec{\alpha}_2 = \frac{y_{A_1} - y_{A_2}}{x_{A_1} - x_{A_2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t^2 [\vec{\alpha}_2 (x_{A_2} - x_{A_0}) + y_{A_0} - y_{A_2}] + 2t [\vec{\alpha}_2 (x_{A_0} - x_{A_2}) + y_{A_2} - y_{A_0}] + \vec{\alpha}_2 (x_{M_1} - x_{A_0}) - y_{M_1} + y_{A_0} = 0$$



t de $M_1 \approx 0,435382$

$$x_{A_1} \approx 24,015$$

$$y_{A_1} \approx 39,091$$

4) M_1 est le sommet de la parabole.

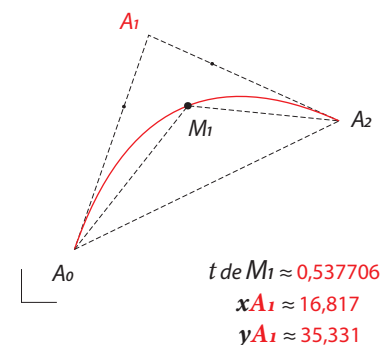
Avec les mêmes points de 1)

et à l'aide des équations des dérivées première et seconde :

$$\text{résoudre} \begin{cases} x_{M_1} = t^2 (x_{A_0} + x_{A_2} - 2x_{A_1}) + 2t (x_{A_1} - x_{A_0}) + x_{A_0} \\ y_{M_1} = t^2 (y_{A_0} + y_{A_2} - 2y_{A_1}) + 2t (y_{A_1} - y_{A_0}) + y_{A_0} \\ \frac{g'(t)}{f'(t)} = - \frac{f''(t)}{g''(t)} \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \begin{matrix} x_0 = x_{A_0} & y_0 = y_{A_0} \\ x_2 = x_{A_2} & y_2 = y_{A_2} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} & + t^3 [(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2] \\ \Rightarrow & -3t^2 [(x_0^2 + x_0x_2 + x_0x_{M_1} - x_2x_{M_1}) + (y_0^2 + y_0y_2 + y_0y_{M_1} - y_2y_{M_1})] \\ & + t [(3x_0^2 - x_0x_2 - 5x_0x_{M_1} + x_2x_{M_1} + 2x_{M_1}^2) + (3y_0^2 - y_0y_2 - 5y_0y_{M_1} + y_2y_{M_1} + 2y_{M_1}^2)] \\ & - (x_0 - x_{M_1})^2 - (y_0 - y_{M_1})^2 = 0 \end{aligned}$$



t de $M_1 \approx 0,537706$

$$x_{A_1} \approx 16,817$$

$$y_{A_1} \approx 35,331$$

B3 passant strictement par 3 points

a) P_1 est fixe et la tangente en P_3 est imposée.

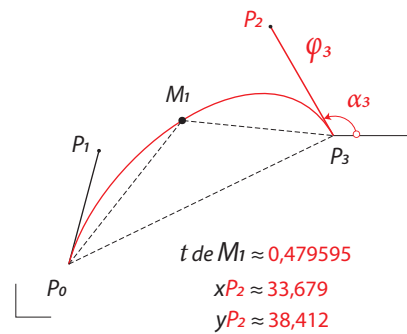
avec : $x_{P_1}=11$ $y_{P_1}=22$ et $\alpha_3 = 120^\circ$ ou -40°

M_1	22	26
P_0	7	7
P_1	11	22
P_2	??	??
P_3	42	24

$$\text{résoudre } \begin{cases} xM(t) = [xP_3 - xP_0 + 3(xP_1 - xP_2)]t^3 + 3(xP_0 + xP_2 - 2xP_1)t^2 + 3(xP_1 - xP_0)t + xP_0 \\ yM(t) = [yP_3 - yP_0 + 3(yP_1 - yP_2)]t^3 + 3(yP_0 + yP_2 - 2yP_1)t^2 + 3(yP_1 - yP_0)t + yP_0 \\ xP_2 = (\varphi_3 \cos(\alpha_3) + xP_3) \quad yP_2 = (\varphi_3 \sin(\alpha_3) + yP_3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^3 [\vec{\alpha}_3(xP_0 - 3xP_1 + 2xP_3) - (yP_0 - 3yP_1 + 2yP_3)] \\ + 3t^2 [\vec{\alpha}_3(-xP_0 + 2xP_1 - xP_3) - (-yP_0 + 2yP_1 - yP_3)] \\ + 3t [\vec{\alpha}_3(xP_0 - xP_1) - (yP_0 - yP_1)] \\ + \vec{\alpha}_3(xM_1 - xP_0) - (yM_1 - yP_0) = 0 \end{cases} \quad \text{calcul de } t_{(M_1)} \quad \text{A}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xP_2 = [xM_1 - (1-t)^3 xP_0 - 3t(1-t)^2 xP_1 - t^3 xP_3] / [3t^2(1-t)] \\ yP_2 = [yM_1 - (1-t)^3 yP_0 - 3t(1-t)^2 yP_1 - t^3 yP_3] / [3t^2(1-t)] \end{cases} \quad \text{Donc } \varphi_3 = \| \vec{P_3P_2} \|$$



b) P_2 est fixe et la tangente en P_0 est imposée.

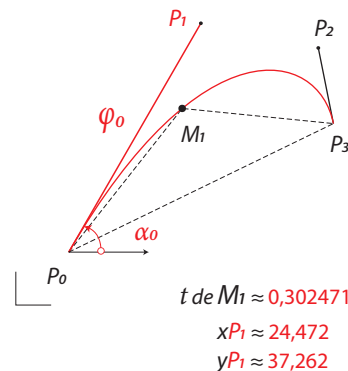
avec : $x_{P_2}=40$ $y_{P_2}=34$ et $\alpha_0 = 60^\circ$

M_1	22	26
P_0	7	7
P_1	??	??
P_2	40	34
P_3	42	24

$$\text{résoudre } \begin{cases} xM(t) = [xP_3 - xP_0 + 3(xP_1 - xP_2)]t^3 + 3(xP_0 + xP_2 - 2xP_1)t^2 + 3(xP_1 - xP_0)t + xP_0 \\ yM(t) = [yP_3 - yP_0 + 3(yP_1 - yP_2)]t^3 + 3(yP_0 + yP_2 - 2yP_1)t^2 + 3(yP_1 - yP_0)t + yP_0 \\ xP_1 = \varphi_0 \cos(\alpha_0) + xP_0 \quad yP_1 = \varphi_0 \sin(\alpha_0) + yP_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^3 [\vec{\alpha}_0(-xP_3 - 2xP_0 + 3xP_2) - (-yP_3 - 2yP_0 + 3yP_2)] \\ + 3t^2 [\vec{\alpha}_0(xP_0 - xP_2) - (yP_0 - yP_2)] \\ + \vec{\alpha}_0(xM_1 - xP_0) - (yM_1 - yP_0) = 0 \end{cases} \quad \text{calcul de } t_{(M_1)} \quad \text{B}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xP_1 = [xM_1 - (1-t)^3 xP_0 - 3t^2(1-t) xP_2 - t^3 xP_3] / [3t(1-t)^2] \\ yP_1 = [yM_1 - (1-t)^3 yP_0 - 3t^2(1-t) yP_2 - t^3 yP_3] / [3t(1-t)^2] \end{cases} \quad \text{Donc } \varphi_0 = \| \vec{P_0P_1} \|$$



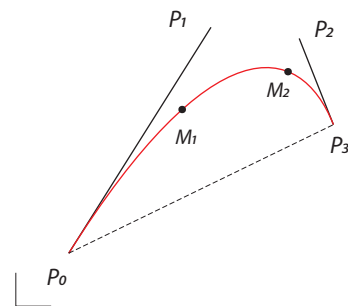
B3 passant strictement par 4 points (source : Mr. Krauss)

soit

	X	Y
$P_0 = M_0$	7	7
M_1	22	26
M_2	36	31
$P_3 = M_3$	42	24

Dans ce cas il faut estimer t_1 de M_1 et t_2 de M_2

Exemple avec $t_1 = 0,3$ et $t_2 = 0,7$



$$\text{Résoudre } \begin{cases} 3t_1(1-t_1)^2 xP_1 + 3t_1^2(1-t_1) xP_2 = xM_1 - (1-t_1)^3 xP_0 - t_1^3 xP_3 \\ 3t_2(1-t_2)^2 xP_1 + 3t_2^2(1-t_2) xP_2 = xM_2 - (1-t_2)^3 xP_0 - t_2^3 xP_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-t_1) xP_1 + t_1 xP_2 = \frac{xM_1 - (1-t_1)^3 xP_0 - t_1^3 xP_3}{[3t_1(1-t_1)]} \\ (1-t_2) xP_1 + t_2 xP_2 = \frac{xM_2 - (1-t_2)^3 xP_0 - t_2^3 xP_3}{[3t_2(1-t_2)]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xP_1 = \frac{x\alpha_1 t_2 - x\alpha_2 t_1}{t_2 - t_1} \\ xP_2 = \frac{x\alpha_2(1-t_1) - x\alpha_1(1-t_2)}{t_2 - t_1} \end{cases}$$

	X	Y
P_0	7	7
P_1	25,810	36,873
P_2	37,476	35,397
P_3	42	24

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-t_1) yP_1 + t_1 yP_2 = \frac{yM_1 - (1-t_1)^3 yP_0 - t_1^3 yP_3}{[3t_1(1-t_1)]} \\ (1-t_2) yP_1 + t_2 yP_2 = \frac{yM_2 - (1-t_2)^3 yP_0 - t_2^3 yP_3}{[3t_2(1-t_2)]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yP_1 = \frac{y\alpha_1 t_2 - y\alpha_2 t_1}{t_2 - t_1} \\ yP_2 = \frac{y\alpha_2(1-t_1) - y\alpha_1(1-t_2)}{t_2 - t_1} \end{cases}$$

NB : toutes ces définitions strictes peuvent engendrer des résultats incohérents ou aucunes solutions.

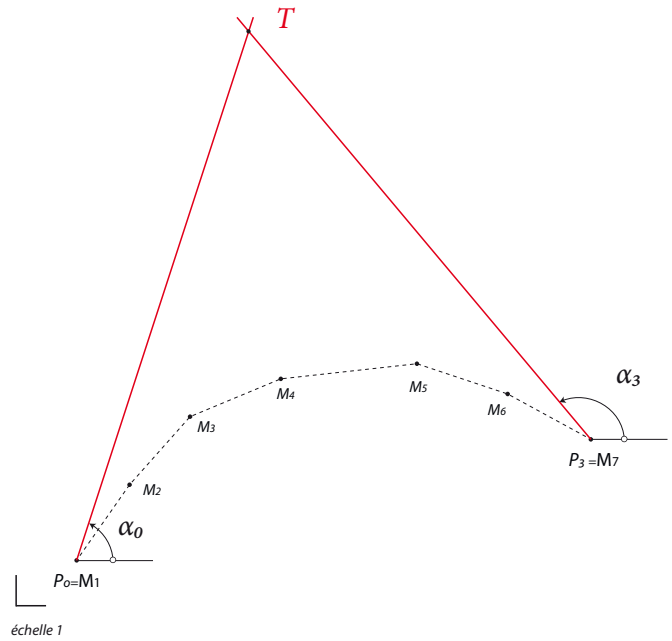
Lissage, ajustement, de points par une B_3 avec l'algorithme «lissage» .

Méthode «Belharra» .

Exemple 1)

Données de départ (calculs préliminaires)

	X	Y	t estimé	
$P_0 = M_1$	8	6	0	$\alpha_0 = 72^\circ$
M_2	15	16	0,14865	$\ P_0T\ = 73,55$
M_3	23	25	0,29331	
M_4	35	30	0,45957	
M_5	53	32	0,69247	$x_T = 30,729$ $y_T = 75,952$
M_6	65	28	0,85921	$\ P_3T\ = 70,43$
$P_3 = M_7$	76	22	1	$\alpha_3 = 130^\circ$



A) Utilisons les formules de **(A)** qui permettent de définir $\varphi_{3(M_n)}$ par rapport à P_1 et un point M_n

avec **(A)** nous pouvons calculer 5 valeurs possibles de P_2 : $P_{2(M_2)}, P_{2(M_3)}, P_{2(M_4)}, P_{2(M_5)}, P_{2(M_6)}$

et par conséquent : $\varphi_{3(M_2)}, \varphi_{3(M_3)}, \varphi_{3(M_4)}, \varphi_{3(M_5)}, \varphi_{3(M_6)}$

$t^3 [\vec{\alpha}_3(xP_0 - 3xP_1 + 2xP_3) - (yP_0 - 3yP_1 + 2yP_3)]$ $+ 3t^2 [\vec{\alpha}_3(-xP_0 + 2xP_1 - xP_3) - (-yP_0 + 2yP_1 - yP_3)]$ $+ 3t [\vec{\alpha}_3(xP_0 - xP_1) - (yP_0 - yP_1)]$ $+ \vec{\alpha}_3(xM_n - xP_0) - (yM_n - yP_0) = 0$ <p style="text-align: right; color: red;">calcul de $t_{(M_n)}$</p>	(A)
avec $t = t_{(M_n)}$ $xP_{2(t)} = [xM_n - (1-t)^3 xP_0 - 3t(1-t)^2 xP_1 - t^3 xP_3] / [3t^2(1-t)]$ $yP_{2(t)} = [yM_n - (1-t)^3 yP_0 - 3t(1-t)^2 yP_1 - t^3 yP_3] / [3t^2(1-t)]$	$\Rightarrow \varphi_{3(M_n)}$

NB: après avoir résolu l'équation du 3eme degré il faut choisir un t qui appartient à l'intervalle]0 1[sinon utiliser le t estimé .

NB : Au départ de l'algorithme $P_1(\text{Moyen}) = T$ Les suivants seront calculés dans **B)**

Définissons $\varphi_{3(\text{moyen})}$ avec une moyenne pondérée .

Le poid de $\varphi_{3(M_n)}$ est l'inverse de la distance : $M_n P_{2(M_n)} = \| M_n P_{2(M_n)} \|^{-1}$

Cela veut dire que plus $P_{2(M_n)}$ est près de M_n plus son poid est fort.

$$\| M_2 P_{2(M_2)} \|^{-1} = W_2$$

$$\| M_3 P_{2(M_3)} \|^{-1} = W_3$$

$$\| M_4 P_{2(M_4)} \|^{-1} = W_4$$

$$\| M_5 P_{2(M_5)} \|^{-1} = W_5$$

$$\| M_6 P_{2(M_6)} \|^{-1} = W_6$$

$$\varphi_{3(\text{Moyen})} = \frac{\varphi_{3(M_2)} W_2 + \varphi_{3(M_3)} W_3 + \varphi_{3(M_4)} W_4 + \varphi_{3(M_5)} W_5 + \varphi_{3(M_6)} W_6}{W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6}$$

$$\Rightarrow P_2(\text{Moyen}) \quad \begin{aligned} xP_2 &= \varphi_{3(\text{Moyen})} \cos(\alpha_3) + xP_3 \\ yP_2 &= \varphi_{3(\text{Moyen})} \sin(\alpha_3) + yP_3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{puis aller à B)} \\ &\text{(page suivante)} \end{aligned}$$

$$t^3 [\vec{\alpha}_0(-xP_3 - 2xP_0 + 3xP_2) - (-yP_3 - 2yP_0 + 3yP_2)] + 3t^2 [\vec{\alpha}_0(xP_0 - xP_2) - (yP_0 - yP_2)] + \vec{\alpha}_0(xMn - xP_0) - (yMn - yP_0) = 0 \quad \text{calcul de } t_{(Mn)} \quad \textcircled{B}$$

avec $t = t_{(Mn)}$

$$xP_{1(t)} = [xMn - (1-t)^3 xP_0 - 3t^2(1-t) xP_2 - t^3 xP_3] / [3t(1-t)^2]$$

$$yP_{1(t)} = [yMn - (1-t)^3 yP_0 - 3t^2(1-t) yP_2 - t^3 yP_3] / [3t(1-t)^2]$$

$\Rightarrow \varphi_{0(Mn)}$

NB : P_2 est calculé dans **A)**

B) Avec : P_2 et les formules de \textcircled{B}

Définissons les 5 valeurs possibles de φ_0 : $\varphi_{0(M2)}, \varphi_{0(M3)}, \varphi_{0(M4)}, \varphi_{0(M5)}, \varphi_{0(M6)}$

$$\varphi_{0(\text{Moyen})} = \frac{\varphi_{0(M2)} W_2 + \varphi_{0(M3)} W_3 + \varphi_{0(M4)} W_4 + \varphi_{0(M5)} W_5 + \varphi_{0(M6)} W_6}{W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6}$$

$\Rightarrow P_1(\text{Moyen})$

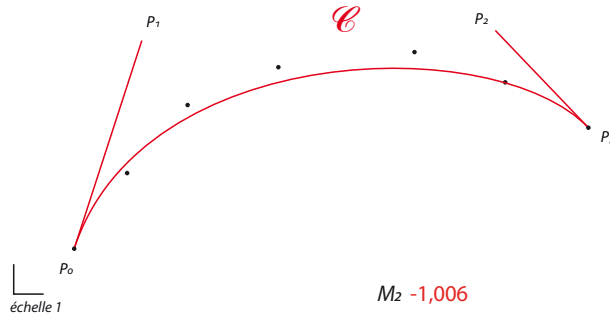
$$xP_1 = \varphi_{0(\text{Moyen})} \cos(\alpha_0) + xP_0$$

$$yP_1 = \varphi_{0(\text{Moyen})} \sin(\alpha_0) + yP_0$$

Ensuite répétons le processus **A)** avec P_1 calculé, **B)** avec P_2 calculé etc....

Voici le résultat après 30 itérations (avec les φ équilibrés)

\mathcal{C}	X	Y
P_0	8	6
P_1	16,942	33,521
P_2	63,693	34,862
P_3	76	22



analyse statistique, écart des points M avec \mathcal{C} (méthode page 19)

M_2 -1,006
 M_3 1,185
 M_4 1,383
 M_5 1,403
 M_6 0,600

$$EQM = \frac{\sum_1^n (\text{écart}_{(n)}^2)}{n} = 1,3317$$

Conseils et contraintes

- 1) La progression doit être continue : pas de points d'inflexion sur celle ci, $P_0 \neq P_3$.
- 2) Les φ ne doivent pas dépasser le point d'intersection T sinon la courbe aura un point d'inflexion sur son domaine de définition $]0 \ 1[\Rightarrow$ Remède : $\varphi_0 = ||P_0T||/2$ ou $\varphi_3 = ||P_3T||/2$
- 3) Les φ doivent être équilibrés (il ne faut pas que φ_0 soit grand et φ_3 très petit (et vice versa).

\Rightarrow personnellement j'applique ces règles : **a)** si $\frac{\varphi_3}{\varphi_0} < 0,4 \Rightarrow \varphi_3 = \varphi_0 \times 0,8$ **b)** si $\frac{\varphi_0}{\varphi_3} < 0,4 \Rightarrow \varphi_0 = \varphi_3 \times 0,8$

Allons plus loin !!

L'algorithme «*lissage*» a ses limites car les angles α_0 et α_3 sont fixes.

Pour avoir un processus de lissage complet il faut créer l'algorithme : «*MasterLiss*» qui gère les variations de ces angles .

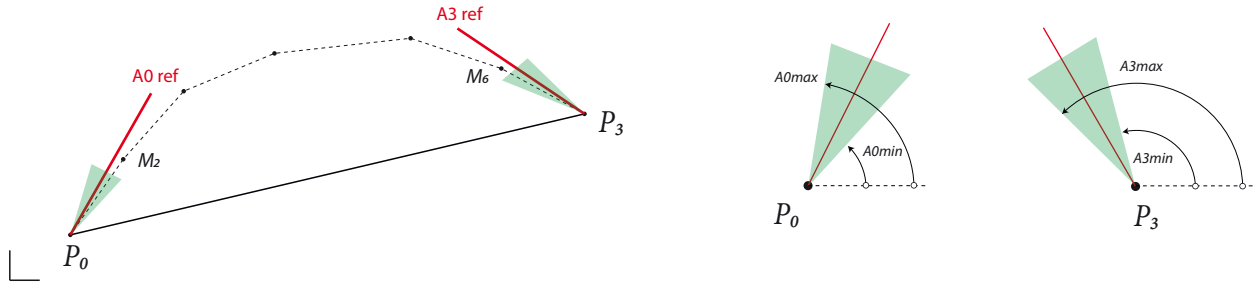
a) Avant tout, pour éviter des boucles inutiles l'algo détermine les angles orientés **A0ref** et **A3ref** qui sont probablement une bonne référence pour le lissage final.

b) Pour se fixer une amplitude de lissage en **A** et **B** (en vert sur les images ci dessous)

Il faut définir les angles orientés suivant avec un Δ° fixé à l'avance (**10° par exemple**) :

$$A0min = A0ref - \Delta, \quad A0max = A0ref + \Delta$$

$$A3min = A3ref - \Delta, \quad A3max = A3ref + \Delta$$



c) l'algorithme «*MasterLiss*» peut continuer, 4 cas sont possibles

les angles α_0 et α_3 sont libres «*Masterliss*» effectue $20 \times 20 = 400$ boucles (incrément de 1°)

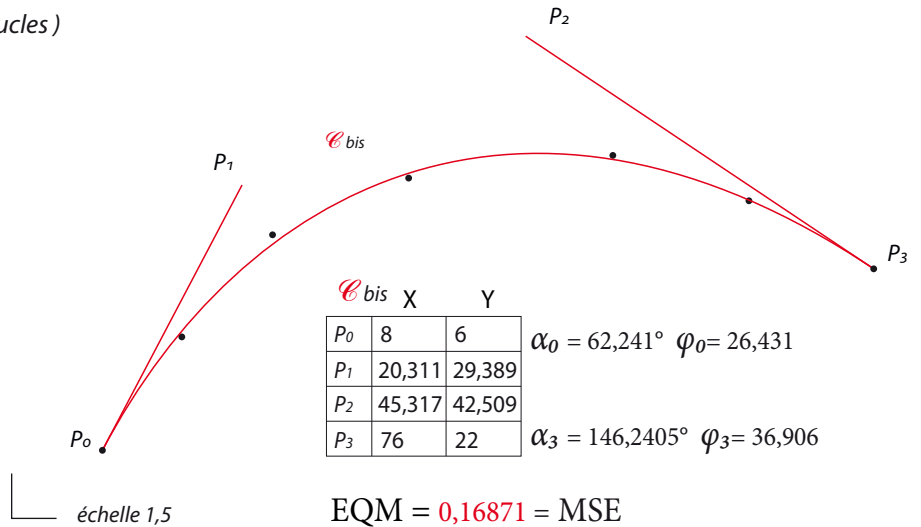
l'angle α_0 est fixe et α_3 est libre (20 boucles)

l'angle α_0 est libre et α_3 est fixe (20 boucles)

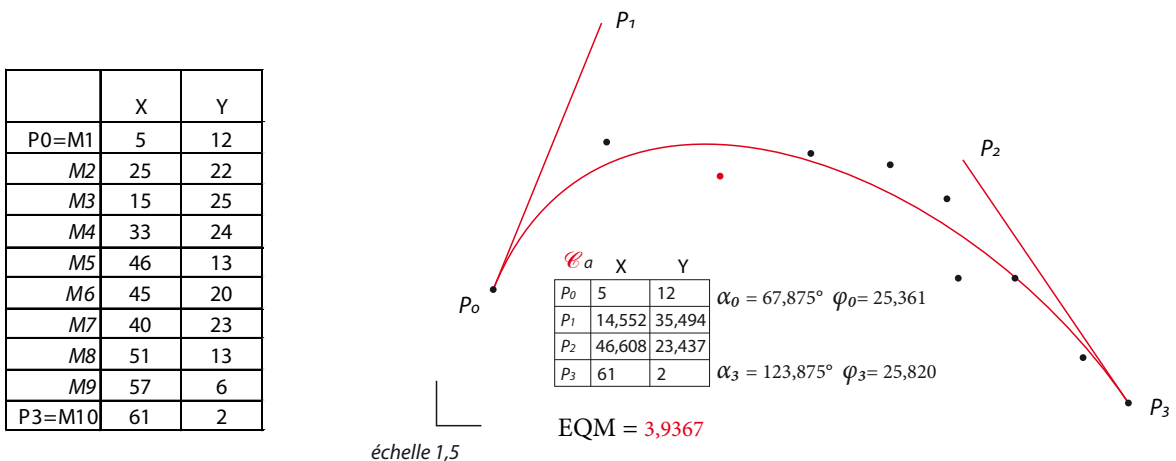
les angles α_0 et α_3 sont fixes (1 boucle)

Exemple 1bis) α_0 et α_3 sont libres.

«*Masterliss*» a détecté 70 Eqm < 1
 48 Eqm < 0,5
 14 Eqm < 0,25



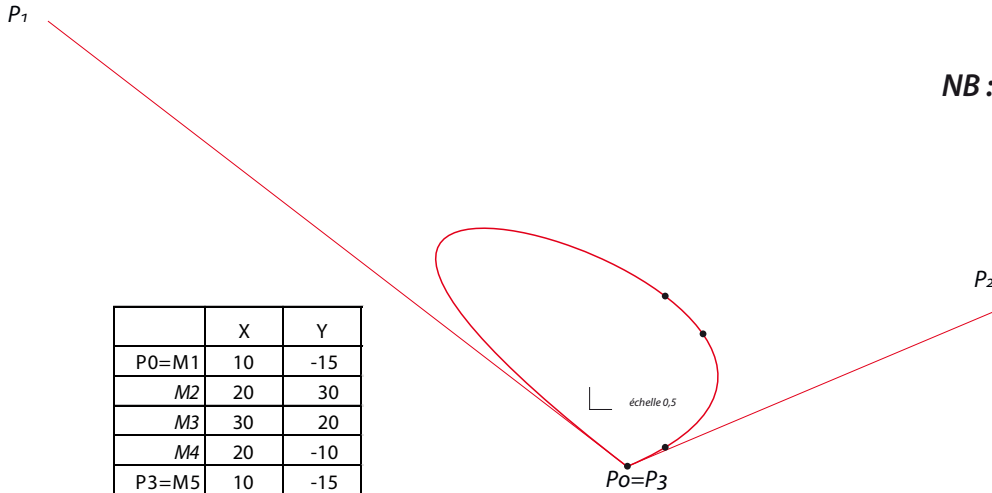
un autre exemple : la progression est désordonnée (sauf M1 et M10)



Un autre algorithme de lissage (plus lent) : « MasterlissFree »

Cet algorithme ausculte sur 180° en P_0 et P_3 la progression des points M (Polyligne).
 Il permet, autant que possible, de lisser des progressions : bizarres, avec 1 point d'inflexion etc...

NB : le résultat peut être incorrect / imprécis

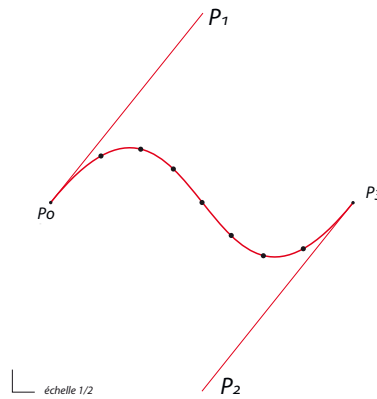


P_0	10	-15
P_1	-143,261	102,724
P_2	109,645	27,020
P_3	10	-15

$\alpha_0 = 142,47^\circ$ $\varphi_0 = 193,256$
 $\alpha_3 = 22,865^\circ$ $\varphi_3 = 108,143$
EQM = 0,00003

progression créé avec :
 $xP0=10$ $yP0=50$ $xP1=50$ $yP1=100$
 $xP2=50$ $yP2=0$ $xP3=90$ $yP3=50$

	X	Y
Po = M1	10,160	50,160
M2	23,451	62,475
M3	33,960	64,273
M4	42,594	59,039
M5	50,180	50,180
M6	57,906	41,461
M7	66,410	36,098
M8	76,969	37,945
P3 = M9	90,120	50,120



P_0	10,16	50,16
P_1	50,411	100,253
P_2	50,148	0,240
P_3	90,12	50,12

$\alpha_0 = 51,2^\circ$ $\varphi_0 = 64,26$
 $\alpha_3 = 231,293^\circ$ $\varphi_3 = 63,92$
EQM = 0,09138

Bon à savoir : comment détecter les points d'inflexion d'une polyligne ?

Tout d'abord il faut claculer les α à l'aide des Angles orientés $Aor1, Aor2$ etc...

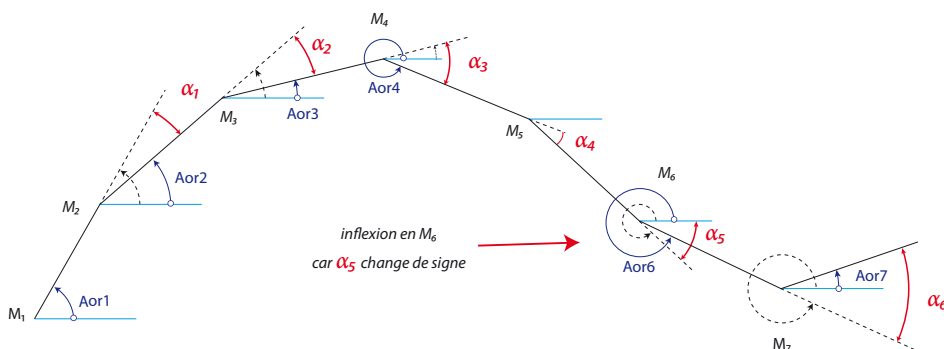
=> $\alpha_1 = Aor2 - Aor1$, $\alpha_2 = Aor3 - Aor2$ etc...

Attention aux cas particuliers

- 1) si on passe de $Aor(n-1)$ $[0^\circ \ 90^\circ]$ vers $Aor(n)$ $[270^\circ \ 360^\circ]$ => $\alpha(n) = -360 + Aor(n) - Aor(n-1)$ (exemple au point M4)
- 2) si on passe de $Aor(n-1)$ $[270^\circ \ 360^\circ]$ vers $Aor(n)$ $[0^\circ \ 90^\circ]$ => $\alpha(n) = 360 + Aor(n) - Aor(n-1)$ (exemple au point M7)

dans notre exemple :

α_5 change de signe : >0 !! cela veut dire qu'il y a un point d'inflexion, en M_6
 par contre si nous inversons la progression (M_7 vers M_1) l'inflexion est en M_5



Comment résoudre un équation du 3ème degré ?

L'équation se présente sous la forme : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Dans un premier temps nous allons simplifier les termes de cette équation

1) divisons tous les coefficients par : a

$$\frac{ax^3}{a} + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx^2}{a} + \frac{d}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

2) changons de variable en posant : $x = \left(z - \frac{B}{3}\right)$

$$\Rightarrow 1 \left(z - \frac{B}{3}\right)^3 + B \left(z - \frac{B}{3}\right)^2 + C \left(z - \frac{B}{3}\right) + D = 0$$

3) En développant et simplifiant $\Rightarrow z^3 + pz + q = 0$

$$p = \left(C - \frac{B^2}{3}\right) \quad \text{et} \quad q = \left(\frac{2B^3}{27} + D - \frac{BC}{3}\right)$$

Le discriminant Δ de $z^3 + pz + q = 0$ est $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$

Le signe et la valeur de Δ impliquent 3 cas

1er cas : si $\Delta > 0$ il existe 1 racine réelle :

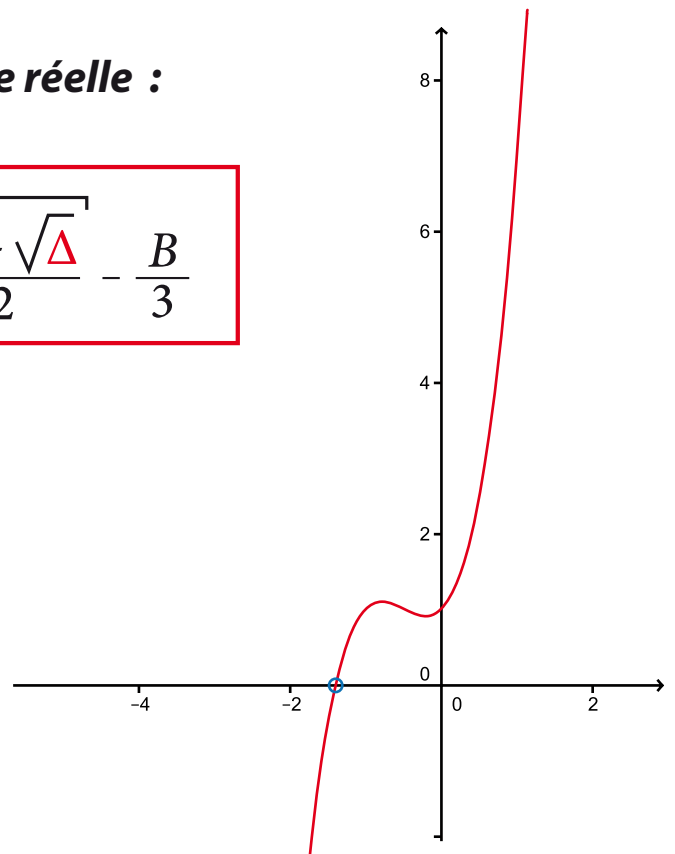
$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} - \frac{B}{3}$$

Exemple 1 $2x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$

$$\Rightarrow z^3 - 0,25z + 0,5 = 0$$

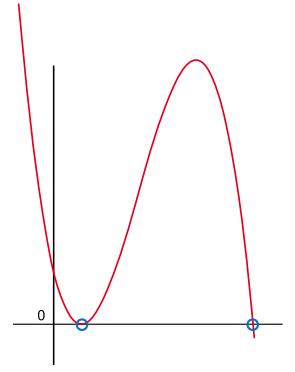
$$\Delta \approx 0,25$$

$$x_1 \approx -1,398$$



2 ème cas : si $\Delta = 0$ il existe «2» racines réelles :

$$x_1 = \frac{3q}{p} - \frac{B}{3} \quad x_2 = x_3 = -\frac{3q}{2p} - \frac{B}{3}$$



Exemple 2 $x^3 - 15x^2 + 27x - 13 = 0$ $\Delta = 0$

$$\Rightarrow z^3 - 48z - 128 = 0 \Rightarrow x_1 = 13 \quad x_2 = x_3 = 1$$

3 ème cas : si $\Delta < 0$ il existe 3 racines réelles :

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{\text{Arccos}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)}{3}\right) - \frac{B}{3}$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{\text{Arccos}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) + 2\pi}{3}\right) - \frac{B}{3}$$

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{\text{Arccos}\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) + 4\pi}{3}\right) - \frac{B}{3}$$

Exemple 3 $2x^3 - 3x^2 - 4x + 2 = 0$

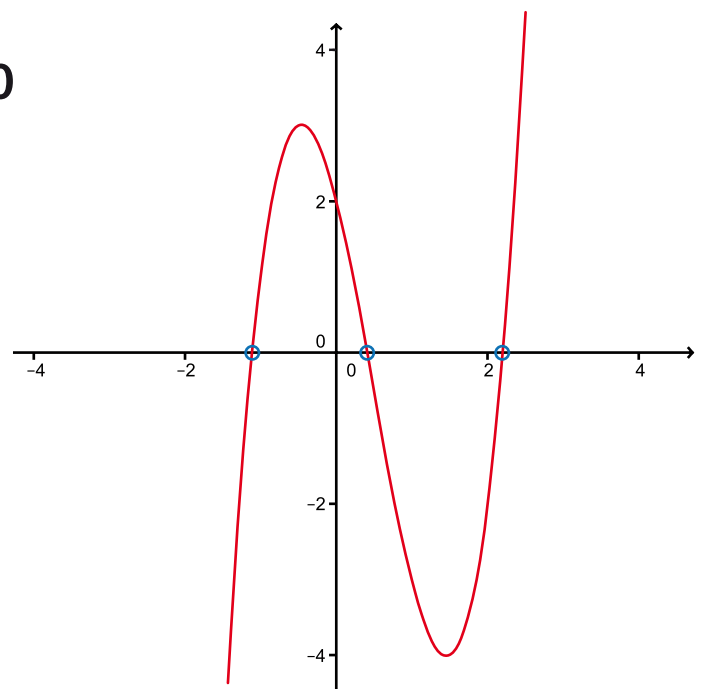
$$\Rightarrow z^3 - 2,75z - 0,25 = 0$$

$$\Delta \approx -3,02$$

$$x_1 \approx 2,02$$

$$x_2 \approx -1,11$$

$$x_3 \approx 0,41$$



Changements de paramètres par rotation avec la formule du « changement de base » (*modifiée*)

Dans cet exemple le but est d'effectuer à la courbe \mathcal{P} une rotation α par rapport à un centre de rotation Ω et éventuellement une translation $\Delta x, \Delta y$

Par calcul matriciel

$$P' \begin{pmatrix} x^{P'} \\ y^{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^P - x^\Omega \\ y^P - y^\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^\Omega + \Delta x \\ y^\Omega + \Delta y \end{pmatrix}$$

ou

par une formule directe

$$P' \begin{cases} x^{P'} = \cos \alpha (x^P - x^\Omega) - \sin \alpha (y^P - y^\Omega) + x^\Omega + \Delta x \\ y^{P'} = \sin \alpha (x^P - x^\Omega) + \cos \alpha (y^P - y^\Omega) + y^\Omega + \Delta y \end{cases}$$

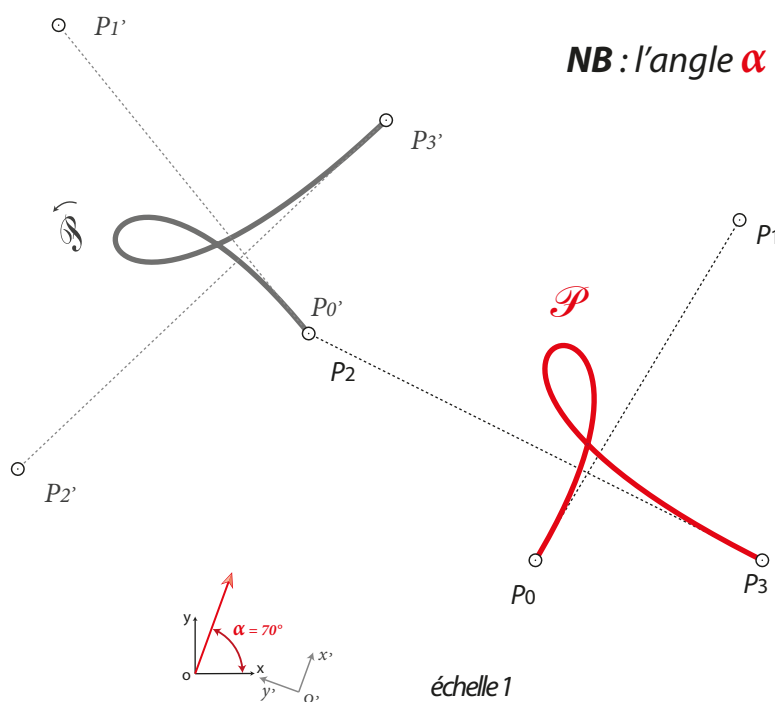
\mathcal{P}	X	Y
P_0	45	15
P_1	72	60
P_2	15	45
P_3	75	15
Origine	0	0

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= 70^\circ \\ \Omega &= P_0 \begin{cases} 45 \\ 15 \end{cases} \\ P_2 - P_0 &\begin{cases} \Delta x = -30 \\ \Delta y = 30 \end{cases} \end{aligned}$$

\Rightarrow

\mathcal{P}'	X	Y
P_0'	15	45
P_1'	-18,05	85,76
P_2'	-23,45	27,07
P_3'	25,26	73,19
Origine'	13,70	-2,42



Réciproquement

$$P \begin{pmatrix} x^P \\ y^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{P'} - x^\Omega - \Delta x \\ y^{P'} - y^\Omega - \Delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^\Omega \\ y^\Omega \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x^P \\ y^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{P'} - x^\Omega - \Delta x \\ y^{P'} - y^\Omega - \Delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^\Omega \\ y^\Omega \end{pmatrix}$$

$$P \begin{cases} x^P = \cos(-\alpha)(x^{P'} - x^\Omega - \Delta x) - \sin(-\alpha)(y^{P'} - y^\Omega - \Delta y) + x^\Omega \\ y^P = \sin(-\alpha)(x^{P'} - x^\Omega - \Delta x) + \cos(-\alpha)(y^{P'} - y^\Omega - \Delta y) + y^\Omega \end{cases} \quad \text{ou} \quad P \begin{cases} x^P = \cos(\alpha)(x^{P'} - x^\Omega - \Delta x) + \sin(\alpha)(y^{P'} - y^\Omega - \Delta y) + x^\Omega \\ y^P = -\sin(\alpha)(x^{P'} - x^\Omega - \Delta x) + \cos(\alpha)(y^{P'} - y^\Omega - \Delta y) + y^\Omega \end{cases}$$

Intersection de 2 droites par la méthode de Mr. Delambre adaptée au sens trigonométrique. (droite définie par un point et son coefficient directeur)

exemple avec les données de la page 24

$$x_{\Omega} = x_A + \frac{(y_A - y_B) - (x_A - x_B)\tan(\beta)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)} = 7,525$$

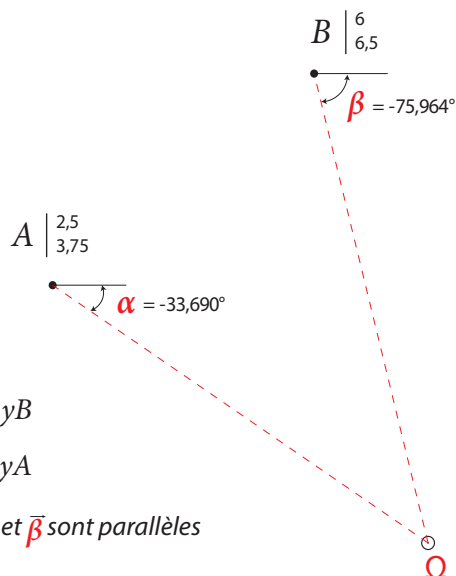
$$y_{\Omega} = y_A + (x_{\Omega} - x_A)\tan(\alpha) = 0,4$$

si $\alpha = 90^\circ$ ou -90° alors $x_{\Omega} = x_A$ et $y_{\Omega} = \tan(\beta)(x_A - x_B) + y_B$



si $\beta = 90^\circ$ ou -90° alors $x_{\Omega} = x_B$ et $y_{\Omega} = \tan(\alpha)(x_B - x_A) + y_A$

si $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$ l'intersection est indéfinie car les vecteurs $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ sont parallèles



Intersection de 2 cercles, méthode topographique [3]

Données initiales

	X	Y	
C ₁	30	23	R ₁ 19
C ₂	65	30	R ₂ 25

$\|C_1C_2\| = 35,693$

Définition de : α_1, α_2

$$\cos(\alpha_1) = \frac{R_1^2 + \|C_1C_2\|^2 - R_2^2}{2R_1\|C_1C_2\|} \Rightarrow \alpha_1 \approx 41,871^\circ$$

$$\cos(\alpha_2) = \frac{R_2^2 + \|C_1C_2\|^2 - R_1^2}{2R_2\|C_1C_2\|} \Rightarrow \alpha_2 \approx 30,482^\circ$$

Définition des angles orientés : $C_1\hat{I}_1, C_1\hat{I}_2$

$$\text{Aor } C_1\hat{I}_1 = \text{atan2}(x_{C_2} - x_{C_1}; y_{C_2} - y_{C_1}) \times \frac{180}{\pi} + \alpha_1 \approx 53,181^\circ$$

$$\text{Aor } C_1\hat{I}_2 = \text{atan2}(x_{C_2} - x_{C_1}; y_{C_2} - y_{C_1}) \times \frac{180}{\pi} - \alpha_1 \approx -30,561^\circ$$

Définition de : \hat{I}_1, \hat{I}_2 par coordonnées polaires à partir de C_1

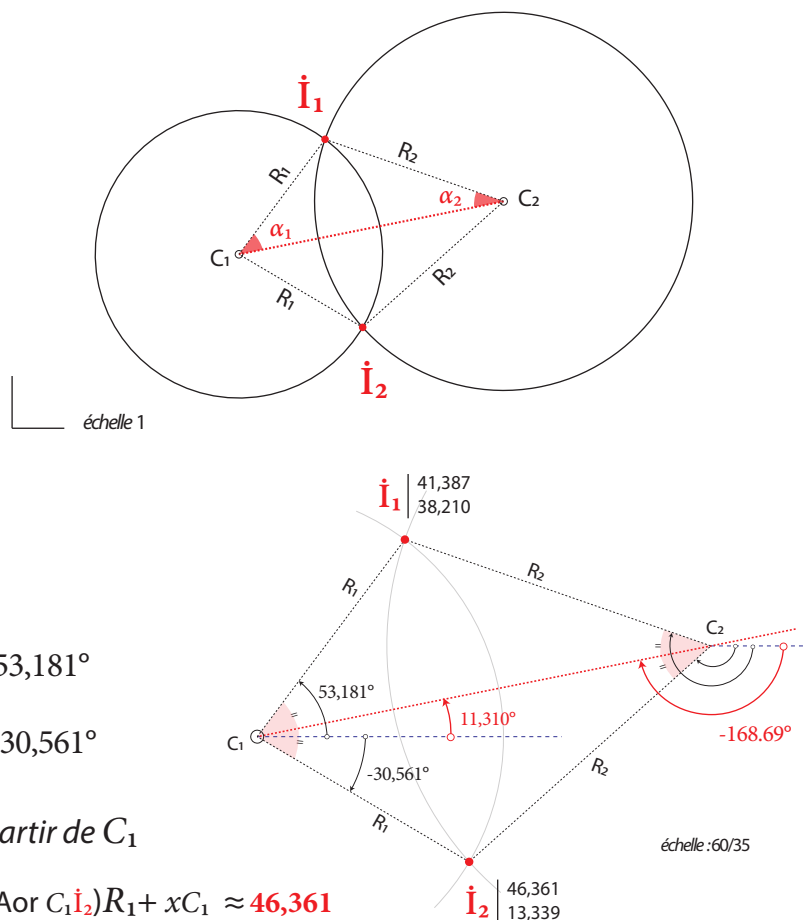
$$x_{\hat{I}_1} = \cos(\text{Aor } C_1\hat{I}_1)R_1 + x_{C_1} \approx 41,387 \quad x_{\hat{I}_2} = \cos(\text{Aor } C_1\hat{I}_2)R_1 + x_{C_1} \approx 46,361$$

$$y_{\hat{I}_1} = \sin(\text{Aor } C_1\hat{I}_1)R_1 + y_{C_1} \approx 38,210 \quad y_{\hat{I}_2} = \sin(\text{Aor } C_1\hat{I}_2)R_1 + y_{C_1} \approx 13,339$$

Cas particuliers

si $\|C_1C_2\| = R_1 + R_2 \Rightarrow$ les cercles sont tangents extérieurement

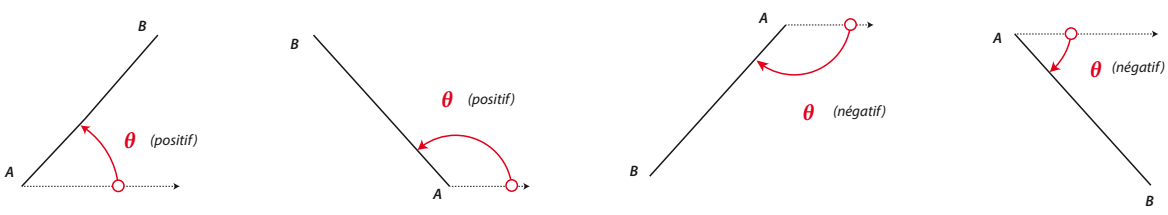
si $\|C_1C_2\| = |R_1 - R_2| \Rightarrow$ les cercles sont tangents intérieurement



Angles orientés.

Un angle orienté θ débute toujours sur un axe parallèle à celui du repère orthonormé : ox
Il peut être positif ou négatif.

Dans le domaine des «nombres complexes» cet angle est l'argument θ .



Constatons que, grace à cet angle, **B** est bien **orienté** par rapport à **A**

Coordonnées polaires.

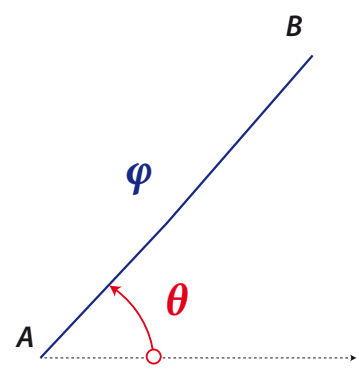
Les coordonnées polaires de **B** par rapport à **A** sont : la distance **AB** φ et l'angle orienté θ

Dans le domaine des «nombres complexes» la distance **AB** est le **module R**

Les coord. polaires permettent de définir les coordonnées cartésiennes de **B** par rapport à **A**

$$xB = xA + \varphi \cos(\theta)$$

$$yB = yA + \varphi \sin(\theta)$$



Quelques formules importantes

$$\Delta x_{(AB)} = xB - xA = \varphi \cos(\theta)$$

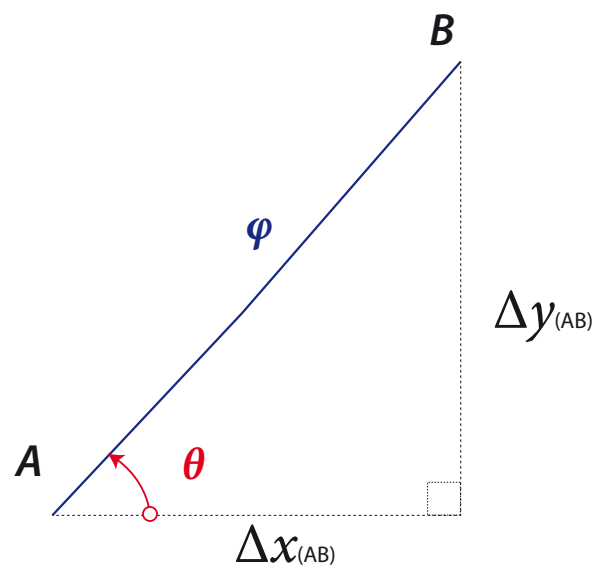
$$\Delta y_{(AB)} = yB - yA = \varphi \sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{\Delta y_{(AB)}}{\Delta x_{(AB)}}$$

$$\varphi = \sqrt{(\Delta x_{(AB)})^2 + (\Delta y_{(AB)})^2}$$

$$\varphi = \frac{\Delta x_{(AB)}}{\cos(\theta)} = \frac{\Delta y_{(AB)}}{\sin(\theta)}$$

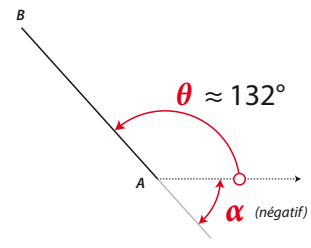
$$\theta = \text{atan2}(\Delta x_{(AB)} ; \Delta y_{(AB)})$$



Pourquoi définir un angle orienté ?

exemple avec $A \begin{vmatrix} -15 \\ 5 \end{vmatrix}$ $B \begin{vmatrix} -33 \\ 25 \end{vmatrix}$ $\varphi \approx 26,9$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y(AB)}{\Delta x(AB)} = \frac{-18}{20} \Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\left(\frac{-18}{20}\right) \approx -48^\circ$$



calculons les coordonnées de B à l'aide de phi et alpha

$x_B = x_A + \varphi \cos(\alpha) = 3?$ il devrait être négatif

$y_B = y_A + \varphi \sin(\alpha) = -15?$ il devrait être positif

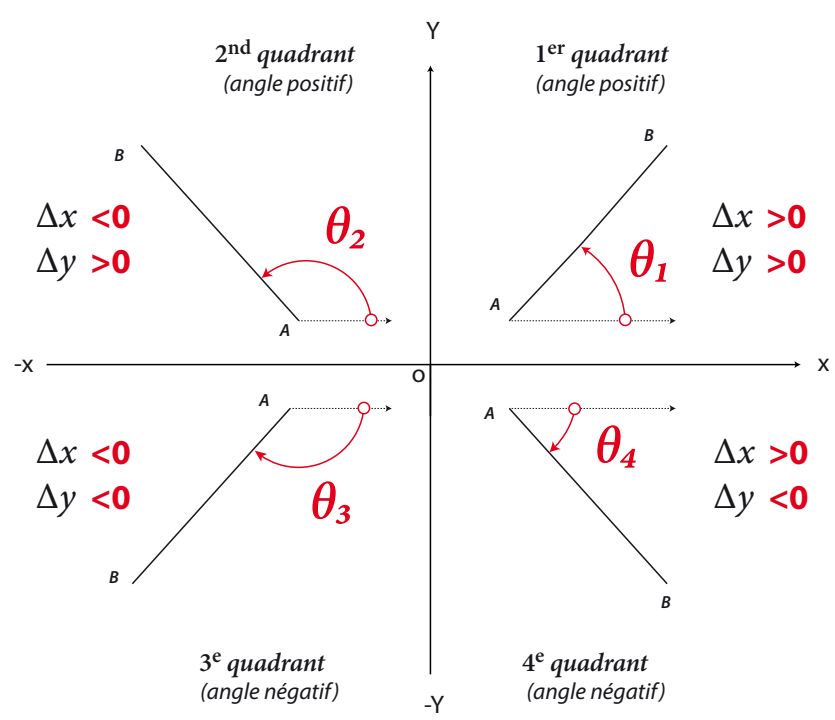


les résultats sont incohérents !!

Dans cet exemple theta doit être $= 180^\circ - |-48^\circ| \Rightarrow \theta \approx 132^\circ$ c'est l'angle supplémentaire de |alpha|

Pour définir correctement un angle orienté il faut connaître la position de AB par rapport aux 4 quadrants du repère orthonormé.

- 1) si $\Delta x_{(AB)} > 0$ et $\Delta y_{(AB)} > 0$ alors AB est orienté vers le 1^{er} quadrant $\Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\left(\frac{\Delta y_{(AB)}}{\Delta x_{(AB)}}\right) \Rightarrow \theta_1 = |\alpha|$
- 2) si $\Delta x_{(AB)} < 0$ et $\Delta y_{(AB)} > 0$ alors AB est orienté vers le 2nd quadrant $\Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\left(\frac{\Delta y_{(AB)}}{\Delta x_{(AB)}}\right) \Rightarrow \theta_2 = 180^\circ - |\alpha|$
- 3) si $\Delta x_{(AB)} < 0$ et $\Delta y_{(AB)} < 0$ alors AB est orienté vers le 3^e quadrant $\Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\left(\frac{\Delta y_{(AB)}}{\Delta x_{(AB)}}\right) \Rightarrow \theta_3 = |\alpha| - 180^\circ$
- 4) si $\Delta x_{(AB)} > 0$ et $\Delta y_{(AB)} < 0$ alors AB est orienté vers le 4^e quadrant $\Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\left(\frac{\Delta y_{(AB)}}{\Delta x_{(AB)}}\right) \Rightarrow \theta_4 = -|\alpha|$



les tableurs ont intégrés ce calcul particulier par la fonction : **Atan2**(Delta x ; Delta y)

Le cercle et ses tangentes

a) calcul des tangentes : $IT = IT'$

$$\begin{aligned}
 &= R \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = R \cotan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = OI \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = OI \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
 &= \frac{HI}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{HI}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{TH}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{TH}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\
 &= \sqrt{HI^2 + TH^2} = \sqrt{OI^2 - OT^2} = \sqrt{IM \times IM'} = \sqrt{HI \times OI}
 \end{aligned}$$

b) calcul du rayon : R

$$\begin{aligned}
 &= IT \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = IT \cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) = OI \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = OI \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 &= \frac{TH}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{TH}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{OH}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{OH}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\
 &= \sqrt{TH^2 + OH^2} = \sqrt{OI^2 - IT^2} = \sqrt{OH \times OI} = \frac{C^2}{8F} + \frac{F}{2}
 \end{aligned}$$

c) calcul de la corde : $TT' = C$

$$\begin{aligned}
 &= 2R \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2IT \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2IT \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 &= 2OH \cotan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2OH \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2HI \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2HI \cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 &= 2\sqrt{IT^2 - HI^2} = 2\sqrt{OT^2 - OH^2} = 2\sqrt{OH \times HI} = 2\sqrt{2 \times R \times F - F^2}
 \end{aligned}$$

d) calcul de la flèche : $OM - OH = HM = F$

$$= R \left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = R \left(1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = R - \sqrt{R^2 - C^2/4}$$

Constantes

maxLissage = 500 *nombre maximum de points de la polyligne*
 Phi = 0.552284749831575 *cest la valeur de φ d'un arc de cercle simulé de rayon 1, son angle au centre = 90°*
 radian = 0.01745329251994329577 *cest la valeur de de 1° en radian*
 cPi = 3.14159265358979323846
 c0 = 0.00000000000000000001 *utile pour éviter des divisions par 0*
 infinity = 9938196601125010515179 *simule une infinité*
 Epsmach = 2E-16 *pour les calculs matriciels*

Type Tableaux

coordM = Array[1..maxLissage] Of Double *coordonnées des points M (x, y, et/ou z)*
 coordP = Array[1..maxLissage] Of Double *coordonnées des points P (x, y, et/ou z)*
 pointBezier = Array[0..3,0..3] Of Double *points de définition des courbes de Bézier B3*
 B3trace = Array[0..3,0..3] Of Longint *nécessaire au tracage des courbes*
 PointInfo = Array[1..100] Of Integer *généralisé par **DetInflex***
 Mat = Array[1..maxLissage,1..maxLissage] of double
 Mat1 = Array[1..maxLissage] of double *utilisés pour les calculs matriciels*
 VECT = ARRAY[1..maxLissage] of double

Variables globales

t, t1, t2 : double *paramètres 't' des équations paramétriques*
 A0, A3, D0, D3 : Double *respectivement angles orientés de P0P1 P3P2 α_0, α_3 et les normes P0P1 P3P2 φ_0 et φ_3*
 xB3, yB3 : Double *coordonnées d'un point de paramètre t d'une B3 : généré par **B3coord***
 typ : Integer *renseigne le type de courbe de bézier (1 à 5) procédure **B3type***
 Psta01 : Integer *renseigne si la B3 a 0 1 ou 2 points stationnaires ou de croisement sur]0 1[**B3type** Génère Psta01*
 a2v : coordM *tableau des angles entre 2 vecteurs construit par **Angle2v***
 nbINF, nbDIS : integer *nombre d'inflexions et/ou de discontinuités d'une polyligne (**Angle2v**)*
 INFat, DISat : Pointinfo *situe les points d'inflexions ou de discontinuités d'une polyligne (**Angle2v**)*
 NBsol, sol1, sol2, sol3 : double *nombre de solutions et solutions déterminés par **Solve2** et **Solve3***
 Xint, Yint : double *résultat de l'intersection de 2 droites généré par **Inter2D***
 RDC, xRC, yRC : double *rayon de courbure et coordonnées de son centre relatif au point M(t), généré par **B3rdc***
 xNB, yNB, xNBr, yNBr : coordM *coordonnées déterminées par **Newbase** et **NewbaseReci***
 B3clotho : pointbezier *résultat de **CllothoB3***
 B3pro : pointBezier *résultat de **B3prolonge***
 B3prosub : pointBezier *résultat de **B3prosubAB***
 B3fus : pointBezier *résultat de **B3fusion***
 B3a, B3b : pointBezier *résultat de **B3subdivise***
 AireA, AireB, AireC : double
 Ba, Bb, Bc : pointBezier *générés par **B3aire***
 NBaire : integer
 xC, yC, xI, yI, rayon, corde, fleche, angle0centre, A0Cvrai : Double *dans procédure **Arcinfo***
 AireSecteur, aireSegment, airePointe, longArc : Double
 testColin : integer *test de colinéarité généré par **Arc2B3** si 0 pas de colinéarité, si 1 oui*
 Arc1, Arc2, Arc3, Arc4 : pointbezier *généré par **Arc2B3***
 NBarc : integer *nombres d'arcs générés par **Arc2B3***
 B3arc90 : pointbezier *arc de cercle simulé, son angle au centre est $\leq 91^\circ$ résultat de **Arc0_90***
 c1, c2, c3, c4 : pointbezier *génère un cercle unité par 4 B3 grace à **CercleUnite***
 cc1, cc2, cc3, cc4 : pointbezier *construit un cercle ou une ellipse par **CercleB3***
 XCreg, YCreg, EQMregcirc, statRC, Radreg, Rmin, Rmax : double *résultats de **RegCirc***
 B3poly, B3param : pointbezier *générés par **RegPoly** et **ParamB3***
 EQMpoly, statPoly : Double
 B3liss, B3free, B3fitted, B3preced : pointbezier
 EQMliss, statLiss : double *résultats des procédures de lissage*
 EQMfree, statFree : double
 NBliss : integer = 0 **IMPORTANT** *nécessaire pour un lissage multiple*
 B3pass, B2pass, B1pass : mat *matrices de passage*
 Matprod, MatprodAB : mat *produit de matrices*
 Matsom, Transmat : mat *somme et transposée d'une matrice*
 MATinv, MatX : mat *inverse d'une matrice et solution d'un système linéaire de matrices : **AX = B***
 DET : double *déterminant d'une matrice*
 coef, coef_1 : mat1 *coefficients d'un polynôme*

fonction **Fact**(N :integer):longint *factorielle*
 fonction **Tan**(α :double):double *tangente d'un angle en radian*
 fonction **Atan1**(x_1, y_1, x_2, y_2 :double):double *Angle simple entre 2 points (en radian)*
 fonction **Atan2**(x_1, y_1, x_2, y_2 :double):double *angle orienté 1 vers 2 (1er et 2ème quadrant positif, 3ème et 4ème négatif)*
 fonction **Atan4**(x_1, y_1, x_2, y_2 :double):double *angle orienté 1 vers 2 toujours positif*
 fonction **Norme**(x_1, y_1, x_2, y_2 :double):double *norme, distance entre 2 points*
 fonction **Cuberoot**(Num :double):double *racine cubique d'un nombre*
 fonction **Sgn**(X :double):double *signe d'un nombre 1 il est positif -1 négatif*
 fonction **PolyEval**(X :double; $coef3$:mat1; deg :integer):double *f(x) d'un polynôme*
NB le sens de coef3 doit être par exemple : 1 +1x +3x² +2x³ deg est le degré du polynôme
 fonction **MoyPond**($X, poidX$:coordM; deb, fin :integer):double *moyenne pondérée*
X est un tableau de nombres, poidX les poids respectifs de ces nombres.
deb, fin permet de calculer cette moyenne sur une partie de ce tableau.
 fonction **moyenne**(X :coordM; deb, fin :integer; op :integer):double *4 moyennes possibles*
si op=1 moyenne simple, si 2 géométrique, si 3 harmonique, si 4 quadratique
 fonction **EQM**($Ecart$:coordM; deb, fin :integer):double *Ecart Quadratique Moyen utile aux processus de lissages.*
 fonction **AirePolygon**(xM, Ym :coordM; N :integer):double *calcule la valeur absolue de l'aire d'un polygone*
 fonction **Nettoie**($Ligne$:string):string *nettoie Ligne en vue d'extraire les X Y d'une polyligne, voire Z ou les valeurs d'une matrice.*
NB la ligne doit contenir : des espaces et/ou tabulations, des " . ' et/ou ' , ' et des chiffres.
IMPORTANT : un CR est obligatoire sur toutes les fin de lignes du fichier.txt contenant les données à extraire (en particulier la dernière).
La procédure LirePoint située dans le/les progammes 'Main' construit les tableaux : xP, yP et/ou zP nbL est le nombre de points.
similairement LireMat construit MatP, le nombre de lignes et de colonnes seront disponibles dans ML, MC:integer
NB la/les lignes, d'éventuels commentaires, doivent être précédées du caractère '%' ; LireB3 lit les pts. de définition d'une B₃ et t construit B3point
 procedure **Angle2v**(xM, Ym :coordM; N :integer) *construit le tableau a2v, de taille N-2 contenant les angles entre 2 vecteurs*
 procedure **DetInflex**(xM, Ym :coordM; N, aff :integer) *détecte les points d'inflexions et de discontinuités par rapport à a2v*
le nombres de points d'inflexions et de discontinuités sont dans nbINF, nbDIS
leur position dans la polyligne est dans INFat, DISat si aff > 0 les datas de précision aff seront affichés sur la console DOS
 procedure **Solve2**(a, b, c :longint) *résoud une équation du second degré et renseigne NBsol, sol1, sol2*
 procedure **Solve3**(a, b, c, d :longint) *résoud une équation du 3ème degré et renseigne NBsol, sol1, sol2, sol3*
 fonction **t_unique**(tk :double):double *compare tk avec sol1, sol2, sol3 (tk est un paramètre t estimé)*
renvoie, si elle existe, la solution unique incluse dans [0 1]. Si plusieurs solutions dans [0 1] la plus rapprochée de tk sera choisie.
Si pas de solutions dans [0 1] la fonction retournera la valeur tk
 procedure **inter2D**($xA, xA, tgtA, xB, yB, tgtB$:double) *intersection de 2 droites par la méthode de Delambre (modifiée)*
tgtA et tgtB sont les tangentes des angles dirigés vers le point d'intersection. Résultat dans Xint, Yint
 fonction **Alphadef**($x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$:double):double
renvoie l'angle orienté de la tangente au cercle passant par 3 pts au point x1 y1
 procedure **NewBase**(xM, Ym :coordM; N :integer; $\alpha, Xom, Yom, dx, dy, echelle$:double)
changement de base des coordonnées xM,yM
 α = angle de rotation, Xom, Yom = centre de rotation, dx, dy = déplacement, echelle = mise à l'échelle , résultats dans xNB, yNB
 procedure **NewBreci**(xM, Ym :coordM; N :integer; $\alpha, Xom, Yom, dx, dy, echelle$:double)
réciroque du changement de base, résultats dans xNB_r, yNB_r
 procedure **CercleUnite** *définis un cercle unité par 4 B3 c1, c2, c3, c4 (sens trigonométrique)*
son centre est en x=0, y=0 et commence au point x=1 y=0
 procedure **CercleB3**($xC, yC, Rad, echX, echY, rotation$:double) *construit un cercle ou un ellipse par 4 B3*
xC, yC = centre du cercle, Rad son rayon, echx, echY échelles, angle de rotation (0 si cercle)
tous les calculs se font par rapport au centre du cercle/ellipse. Résultat dans cc1, cc2, cc3, cc4

fonction AOC($x1, y1, x2, y2, x3, y3$:double):double *calcule l'angle au centre vrai d'un arc passant par un triplet (il peut $\in]0 360^\circ]$ ou $]0 -360^\circ]$)*

procédure Arc0_90($x1, y1, x2, y2, x3, y3$:double) *simule un arc de cercle passant par le triplet. l'AOC maximum est de 91° , la courbe B3arc90 est générée*

procédure Arc2B3($xx1, yy1, xx2, yy2, xx3, yy3$:double) *définis un arc de cercle passant par le triplet $|AOC| \in]0 360^\circ]$ le nombre d'arcs nécessaires est renseigné par NBarc les B3 générées sont: Arc1, Arc2, Arc3, Arc4*

fonction ARClong($x1, y1, x2, y2, x3, y3$:double):double *renvoie la longueur d'un arc passant par 3 points utilisé par B3long, clothoAmoyen NB: l'angle au centre vrai doit $\in]0 180[$*

procédure Arcinfo($x1, y1, x2, y2, x3, y3$:double) *calcule divers éléments d'un arc de cercle passant par 3 points centre du cercle: xC, yC intersection des tangentes: xI, yI, rayon, corde, fleche, angle0centre $\in]0 180[$ AOCvrai, aireSecteur, aireSegment, airePointe, longArc*

procédure B3coord(B3def:pointBezier;t:double) *coordonnées d'un point M(t): xB3, yB3 de la courbe B3def*

procédure B3write(B3def:pointBezier;aff:integer) *si aff > 0 les données de précision aff sont affichées sur la console DOS Calcule les points de définitions d'une B3 ainsi que ses angles (en degré) α_0, α_3 dans A0, A3 et ses distances φ_0, φ_3 dans D0, D3*

procédure B3type(B3def:pointBezier;aff:integer) *détermine le type de la B3 dans Typ et Psta01 = nb de Pts sta. sur [0 1] 1 => 1 point d'inflex, 2 => 2 points d'inflex, 3 => 1 point de rebroussement, 4 => 1 point de croisement, 5 => une parabole, 0 => une droite si aff > 0 affiche les coordonnées de ces points stationnaires ainsi que leur paramètres t1, t2*

fonction B3long(B3def:pointBezier):double *longueur (abscisse curviligne) d'une B3 sur [0 1]*

fonction B3rdc(B3def:pointBezier;t:double):double *rayon de courbure d'une B3 en un point M(t) calcule aussi les coordonnées du centre de courbure xRC, yRC et CCtest Si CCtest = -1 cela veut dire que la courbe est concave en ce point, sinon convexe*

procédure ClothoB3(angledep, xdep, ydep, xfin, yfin, xcercle, ycercle:double;sens:integer) *simule un arc de clothoïde par une B3, la courbe B3clo est générée. xdep, ydep, angledep = coordonnées et angle de l'axe routier au départ de la clotho xfin, yfin = coord. du début de la partie circulaire à raccorder. xcercle, ycercle = coordonnées du centre du cercle si sens = 1 alors la clotho entre dans un secteur circulaire sinon elle en sort*

fonction ClothoAmoyen(B3def:pointBezier):double *renvoie le paramètre A moyen d'une clothoïde simulée*

procédure B3fusion(B1, B2:pointBezier;option:integer) *fusionne 2 courbes liées dans B3fus si option=1 B3fus passera par le point de contact sinon elle n'y passera peut-être pas.*

procédure B3sudivise(B3def:pointBezier;tsub:double) *subdivise une B3 en 2 parties en M(tsub) => B3a B3b*

procédure B3prolonge(B3def:pointBezier;t:double) *prolonge une B3 jusqu'à un point M(t) : t < 0 ou > 1 => B3pro*

procédure B3proSubAB(B3ini:pointBezier;tA, tB:double) *extraite une partie de la B3, sens = tA vers tB => B3prosub*

fonction B3aireSimple(B3def:pointBezier):double *aire simple d'une B3 sur [0 1] NB il ne doit pas avoir de points stationnaires ou de croisements sur]0 1[*

fonction B3aireAB(B3def:pointBezier;tA, tB:double):double *aire sur [tA tB] NB il ne doit pas avoir de points stationnaires ou de croisements sur]tA tB[*

procédure B3aire(B3def:pointBezier;aff:integer):double *prend en compte les points stationnaires ou de croisements sur]0 1[le nombre d'aires est renseigné par NBaire, les aires et B3 générées sont: aireA, aireB, aireC et Ba, Bb, Bc*

fonction DistoB3(B3def:pointBezier;xM, yM, testim:double):double *distance minimum d'un point M à une B3 le paramètre estimé testim est nécessaire pour optimiser la dichotomie Si la distance est négative cela veut dire que le point M est à l'intérieur de la courbe.*

- procedure **Lissage**(xM, yM :coordM; N :integer; $A0, A3$:double) *lisse, ajuste les points M par : B3fitted*
les angles A0, A3 sont fixes, N est le nombre de points à lisser
Méthode BELHARRA (créé par Alexandre Christophe GLON le 19-09-2019)
- procedure **MasterLiss**(xM, yM :coordM; deb, fin :integer; $Alpha0, Alpha3$:double) *Lisse les points M et génère B3Liss*
Grace à deb, fin elle lisse qu'une partie de la polyligne. Très utile si on veut effectuer un lissage multiple, successif.
Si la valeur de l'angle Alpha0 et/ou Alpha3 est >=100 cela voudra dire que A0 et/ou A3 sont libres et peuvent varier.
Dans le cas contraire le/les angles sont fixes, aucune variation ne sera appliquée sur les angles concernés.
NB: ces angles (en radian) doivent être orientés, par précaution j'ai fait en sorte qu'ils soient tous positifs.
La précision du lissage est renseignée par statLiss = EQMLiss Statistiquement c'est l'Ecart Quadratique Moyen = EQM ou MSE
Cette procédure est adaptée pour une suite continue de points M sans points doubles ou stationnaires.
IMPORTANT sauf cas extrêmes B3Liss n'aura pas de points stationnaires ou doubles sur]0 1[
- procedure **MasterLissFree**(xM, yM :coordM; deb, fin :integer) *Lisse les points M par B3free (méthode plus lente)*
Elle ausculte la polyligne en variant les distances D0 et D3 et les angles A0, A3 sur 180°.
Elle permet de lisser des progressions bizarres etc.. mais le résultat est parfois incohérent, imprécis.
La précision du lissage (EQM) est renseignée par statFree = EQMfree
- procedure **RegCirc**(xM, yM :coordM; N :integer) *Lisse la polyligne par une Régression Circulaire (méthode des moindres carrés)*
XCreg, YCreg, Radreg, Rmin, Rmax, statRC = EQMregCirc, sont les résultats de cette régression.
- procedure **RegPoly**(xx, yy :coordM; deb, fin, DEG, op :integer) *Lisse par Régression Polynomiale (méthode des moindres carrés)*
deb, fin permet de sélectionner une partie des points. DEG est le degré du polynôme recherché.
si op = 1 un changement de repère est effectué dans xx, yy faisant en sorte que le 1er point soit aligné horizontalement avec le dernier.
Les coef. du polynôme sont générés dans le tableau coef, leurs sens est par exemple: 1 +1x +3x² +2x³ (coef_1 est en sens inverse)
Enfin cette procédure paramétise la fonction si son degré=3 ou 2 => B3Param EQM = statPoly = EQMpoly
- procedure **ParamB3**($coefpoly$:Mat1; $Xdeb, Xfin$:double) *Paramétrise une fonction de degré 3 ou 2 ou 1 sur l'intervalle [Xdeb Xfin]*
coefpoly doit être dans le sens 1 +1x +3x² +2x³. La courbe B3Param est générée.
NB: la paramétrisation d'une fonction de 2ème ou 1er degré est possible en construisant coefpoly comme par exemple :

$$\begin{matrix} 3 & -5x + 2x^2 + c0x^3 \\ 3 & -5x + c0x^2 + c0x^3 \end{matrix}$$
- procedure **Interpolation**(xM, yM :coordM; N :integer) *interpolation de points par la méthode de Vandermonde.*
Le résultat est généré dans coef et coef_1
- procedure **MatPass** *active les matrices de passages B3pass, B2pass et B1pass*
- function **DetMat**(A :mat; N :integer) *renvoie le déterminant d'une matrice carrée A sa taille est NxN*
- procedure **MATsomme**(A, B :mat; N, k :integer) *Somme de 2 matrices carrées, résultat dans Matsom si k=1 => A+B si k=-1 => A-B*
- procedure **MATmul**(A, B :mat; N :integer) *Multiplication de 2 matrices carrées, résultat dans Matprod*
- procedure **MATmulAB**(A :mat; $L1, C1$:integer; B :mat; $L2, C2$:integer;) *AxB résultat = MatprodAB de taille L1 C2*
L1, C1 est le nombre de Lignes et de Colonnes de la matrice A, pour B c'est L2, C2 IMPORTANT L2 doit être égal à C1
- procedure **Transpose**(A :mat; $L1, C1$:integer) *Transpose la matrice A de taille L1, C1, résultat = Transmat de taille C1, L1*
- procedure **InvMat**(AA, BB :mat; N, M :integer) *résoud un système linéaire de matrices: AX = B par la méthode de Gauss-Jordan*
NxN est la taille de la matrice AA, celle de BB peut être NxM si M=1 => résolution d'un système linéaire «simple».
Si M≠0 la procédure calcule le résultat X dans MatX et le déterminant de AA dans DET
Si M=0 l'inverse de la matrice AA est calculé dans MatInv ainsi que DET de AA. Lancer la procédure comme ceci: InvMat(AA, AA, N, 0)
- procedure **Affmat**(A :mat; $L1, C1$:integer) *Affiche la matrice A de taille L1, C1, sur la console DOS*
- procedure **TraceB3**($B3$:pointBezier; Aff :integer) *Trace une B3 si Aff=1 trace les normes P0P1 et P3P2, si 2 trace aussi 'Po' P1' P2' P3'*
- procedure **TraceB3M**($B3$:pointBezier; Mx, My :coordM; N, aff :integer) *Trace la B3 et les point M si Aff=1 trace aussi P0P1 et P3P2*
- procedure **TraceB**($B3bis$:B3trace; $DXgr, DYgr, aff$:longint) *Nécessaire à Trace_4B3 et Trace_4B3M*
- procedure **Trace_4B3**(Ba, Bb, Bc, Bd :pointBezier; aff :integer) *Trace 4 B3 si aff=1 trace les points de contacts entre les courbes si aff=2 trace aussi les normes P0P1 P3P2*
- procedure **Trace_4B3M**(Ba, Bb, Bc, Bd :pointBezier; Mx, My :coordM; N, aff :integer) *Trace 4 B3 et les points M si aff=1 trace les points de contacts entre les courbes si aff=2 trace aussi les normes P0P1 P3P2*
- procedure **TraceB3etCercle**($B3$:pointBezier; $xC, yC, Radius$:double; $sens, Aff$:integer) *trace une clothoïde et son cercle*
- procedure **TraceRegCirc**($xC, yC, Radius$:double; Mx, My :coordM; N :integer) *trace une regression circulaire*