

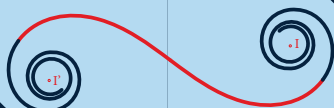
# Formulaire

## Courbes de Bézier

### De Casteljaou

( degré 2 et 3 )

**Bézier Outils**



Fort Socoa



frontispice : [www.agence-ilargia.fr](http://www.agence-ilargia.fr)

# Avant propos

Pour simplifier ce formulaire nous nommerons :

$B_2$  = courbe de Bézier de degré 2

$B_3$  = courbe de Bézier de degré 3

ce sont des courbes paramétriques.

La majorité des sujets traités dans ce formulaire ont été traduits en langage de programmation «Free Pascal» => unité «*B3OutilsV7*»

L'unité et des exemples sont disponibles dans *BezierOutilsV7.zip*

ici : <https://drive.google.com/file/d/1kzkM8y8hxB1S9LC03y7fPToYZCBG5zR8/view?usp=sharing>

Pour profiter du programme «*Maindemo*» il est nécessaire d'extraire *BezierOutilsV7.zip* sur le répertoire C:

Ce «pdf» en Anglais est disponible ici : **Bezier Curves Form V7**

Et en Espagnol ici : **Curvas de Bezier Formulario V7**

# Table des matières

Equations des courbes de Bézier de degré 2.....	pages 4 et 5
Equations des courbes de Bézier de degré 3.....	pages 6 et 7
<b>B3</b> spéciales.....	page 8
Changement de paramètres d'une courbe de Bézier .....	page 9
Intersection d'une droite avec une courbe de Bézier .....	page 10
Estimation du paramètre $t$ Conversion d'une B-spline en <b>B3</b> ....	page 11
Parabole paramétrique , calcul du sommet et du foyer ( <b>B2</b> ) .....	pages 12 et 13
Points stationnaires et de croisement d'une courbe de Bézier .....	pages 14 et 15
Subdivisions récursives d'une courbe de Bézier (De Casteljaou) ..	pages 16 et 17
Fusion de 2 courbes de Bézier .....	page 18
Distance d'un point à une courbe de Bézier .....	page 19
Centre de courbure (cercle osculateur) .....	page 20
Paramétrisation d'une fonction de degré 2 ou 3 , interpolation....	page 21
Aire, abscisse curviligne (longueur) d'une courbe de Bézier .....	pages 22 et 23
Simulation d'un arc de cercle par une courbe de Bézier .....	pages 24 et 25
Simulation d'un arc de clothoïde par une courbe de Bézier .....	pages 26 et 27
Courbe de Bézier passant strictement par 3 et 4 points.....	pages 28 et 29
Lissage, ajustement, de points par une courbe de Bézier.....	pages 30, 31, 32, 33
Résolution d'une équation du 3ème degré .....	pages 34 et 35
Formule du changement de base (modifiée) .....	page 36
Intersections : 2 droites (méthode Delambre) , 2 cercles .....	page 37
Angles orientés, coordonnées polaires .....	pages 38 et 39
Le cercle et ses tangentes.....	pages 40 et 41
Unit <b>B3outilsV7</b> descriptif sommaire .....	pages 42, 43, 44, 45

## Bibliographie

- [1] Modèles de Bézier des B-Splines et des Nurbs par G. DEMENGEL et J.P. POUGET éditions Ellipses
- [2] Topographie et topométrie modernes tome 1 : par S. MILLES et J. LAGOFUN éditions Eyrolles
- [3] Topographie et topométrie modernes tome 2 : par S. MILLES et J. LAGOFUN éditions Eyrolles
- [4] Cours de géométrie : par M. TROYANOV Presses polytechniques et universitaires romandes
- [5] Method'S classe de première : par T. PETIT éditions Ellipses
- [6] Cours de mathématique BTS UIT par Pierre VARIOT éditions Ellipses

# Équations des courbes de Bézier de degré 2 ( $B_2$ ) [1]

Pour calculer les coordonnées d'un point  $M$  de la courbe il faut connaître son paramètre  $t$   
*l'usage veut que le paramètre  $t \in [0 \ 1]$*

## Equations vectorielles et analytiques

a) selon les polynômes de Bernstein

$$\vec{OM}(t) = (1-t)^2 \vec{OP_0} + 2t(1-t) \vec{OP_1} + t^2 \vec{OP_2}$$

$$M(t) \begin{cases} xM(t) = (1-t)^2 xP_0 + 2t(1-t) xP_1 + t^2 xP_2 \\ yM(t) = (1-t)^2 yP_0 + 2t(1-t) yP_1 + t^2 yP_2 \end{cases}$$

b) définition canonique (selon les puissances de  $t$ )

$$\vec{OM}(t) = t^2(\vec{P_1P_0} + \vec{P_1P_2}) + 2t(\vec{P_0P_1}) + \vec{OP_0}$$

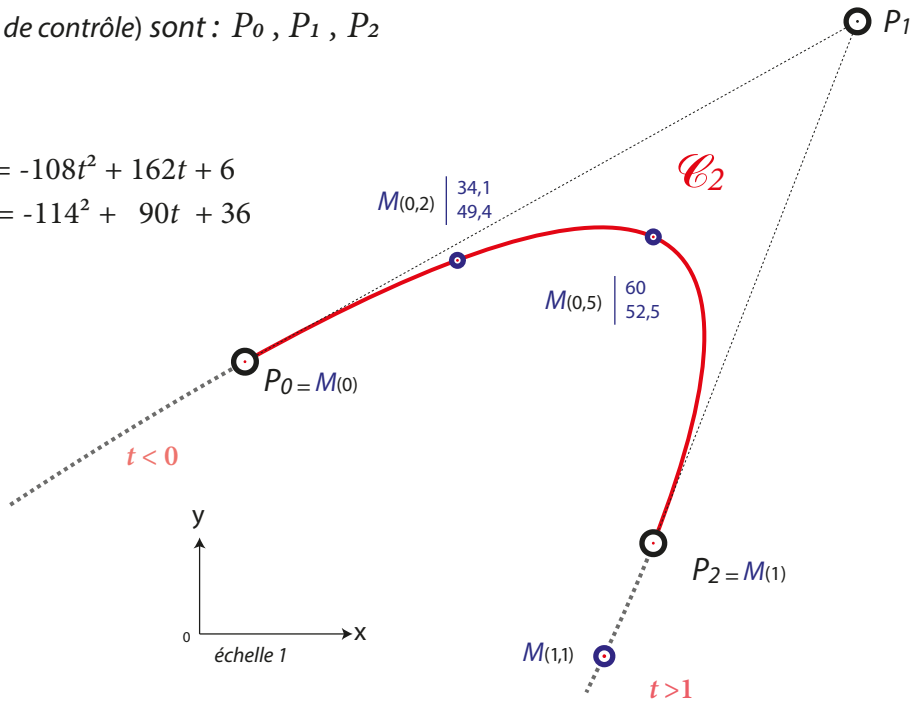
$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = t^2 (xP_0 - 2xP_1 + xP_2) + 2t(xP_1 - xP_0) + xP_0 \\ y = g(t) = t^2 (yP_0 - 2yP_1 + yP_2) + 2t(yP_1 - yP_0) + yP_0 \end{cases}$$

selon cet exemple la courbe  $\mathcal{C}_2$  est une partie de parabole  
 ses **points de définition** (ou points de contrôle) sont :  $P_0, P_1, P_2$

$\mathcal{C}_2$	X	Y
$P_0$	6	36
$P_1$	87	81
$P_2$	60	12

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = -108t^2 + 162t + 6 \\ y = g(t) = -114t^2 + 90t + 36 \end{cases}$$

$t$	$xM(t)$	$yM(t)$
<b>0</b>	<b>6</b>	<b>36</b>
0,2	34,1	49,4
0,5	60	52,5
<b>1</b>	<b>60</b>	<b>12</b>
1,1	53,5	-2,9



Les vecteurs  $\vec{P_0P_1}$  et  $\vec{P_2P_1}$  sont respectivement tangent à  $\mathcal{C}_2$  en  $P_0$  et  $P_2$

## Calcul des coordonnées de $M(t)$ avec des Matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} xP_0 & yP_0 \\ xP_1 & yP_1 \\ xP_2 & yP_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xM(t) & yM(t) \end{bmatrix}$$

$\mathcal{T}_n$                        $\mathcal{M}_2$                        $(\vec{OP})$                        $\vec{OM}(t)$

Exemple (avec  $t = 0,5$ )

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 36 \\ 87 & 81 \\ 60 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 52,5 \end{bmatrix}$$

Équations des dérivées 1<sup>re</sup> et 2<sup>de</sup> => Hodographes : 1<sup>er</sup> =  $\mathcal{H}'$  et 2<sup>d</sup> =  $\mathcal{H}''$

a) selon les polynômes de Bernstein

b) canonique (selon les puissances de t)

$$\overline{OM}'(t) = 2[ (1-t)(\overline{P_0P_1}) + t(\overline{P_1P_2}) ]$$

$$\overline{OM}'(t) = 2t(\overline{P_1P_0} + \overline{P_1P_2}) + 2(\overline{P_0P_1})$$

$$M'(t) \begin{cases} xM'(t) = 2[ (1-t)(xP_1 - xP_0) + t(xP_2 - xP_1) ] \\ yM'(t) = 2[ (1-t)(yP_1 - yP_0) + t(yP_2 - yP_1) ] \end{cases}$$

$$M'(t) \begin{cases} x' = f'(t) = 2t(xP_0 - 2xP_1 + xP_2) + 2(xP_1 - xP_0) \\ y' = g'(t) = 2t(yP_0 - 2yP_1 + yP_2) + 2(yP_1 - yP_0) \end{cases}$$

a'')  $\overline{OM}''(t) = \forall t \in \mathbb{R} = 2[ P_0 - 2P_1 + P_2 ]$   $\mathcal{H}''$   $\begin{cases} x'' = 2(xP_0 - 2xP_1 + xP_2) \\ y'' = 2(yP_0 - 2yP_1 + yP_2) \end{cases}$  selon l'Exemple 2  $\begin{cases} -216 \\ -228 \end{cases}$   
c'est le point

remarquons que  $\overline{OM}''$  définit l'orientation de l'axe **A** passant par le sommet de la parabole  $\mathcal{C}_2$

Hodographe  $\mathcal{H}'$

NB:  $\mathcal{H}'$  doit être équipollent: se dit de vecteurs parallèles, de même sens et de même grandeur.

Mais visuellement sur [0 1] il déborde du format A4 de la page => Pour y remédier il sera à l'échelle:  $\frac{1}{2} = 0,5$

Dans cet exemple  $\mathcal{H}'$  ne sera pas équipollent car la norme des vecteurs est divisée par 2

Définition de l'hodographe  $\mathcal{H}'$  sur l'intervalle [0 1] avec l'équation  $\overline{OM}'(t) = 2[ (1-t)(\overline{P_0P_1}) + t(\overline{P_1P_2}) ]$

$$H'_0 = \overline{OM}'(0) = 2[(P_1 - P_0)]$$

$$H'_1 = \overline{OM}'(1) = 2[(P_2 - P_1)]$$

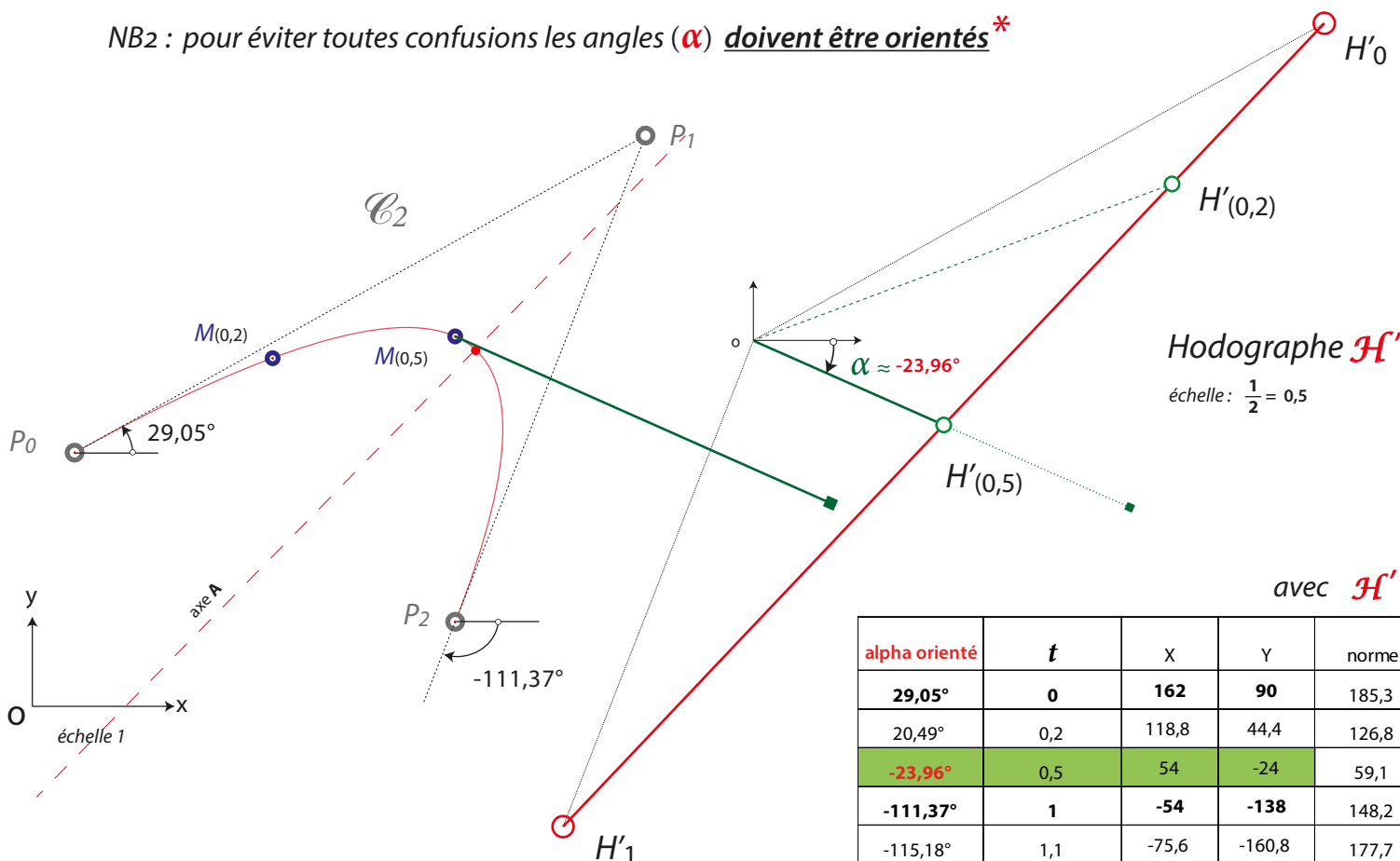
donc  $\mathcal{H}'$

	X	Y
$H'_0$	162	90
$H'_1$	-54	-138

avec ces valeurs il est équipollent et peut servir à définir les vecteurs tangents

NB1: la tangente à  $\mathcal{C}_2$  en un point  $M(t) = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{yH'(t)}{xH'(t)} = \tan(\alpha)$

NB2: pour éviter toutes confusions les angles ( $\alpha$ ) doivent être orientés\*



\* Pour en savoir plus sur les angles orientés et les coordonnées polaires: voir pages 38 et 39

## a) Définition selon les polynômes de Bernstein

$$\overline{OM}(t) = (1-t)^3 \overline{OP}_0 + 3t(1-t)^2 \overline{OP}_1 + 3t^2(1-t) \overline{OP}_2 + t^3 \overline{OP}_3$$

$$M(t) \begin{cases} xM(t) = (1-t)^3 xP_0 + 3t(1-t)^2 xP_1 + 3t^2(1-t) xP_2 + t^3 xP_3 \\ yM(t) = (1-t)^3 yP_0 + 3t(1-t)^2 yP_1 + 3t^2(1-t) yP_2 + t^3 yP_3 \end{cases}$$

$$\overline{OM}'(t) = 3[ (1-t)^2 (\overline{P_0P_1}) + 2t(1-t) (\overline{P_1P_2}) + t^2 (\overline{P_2P_3}) ]$$

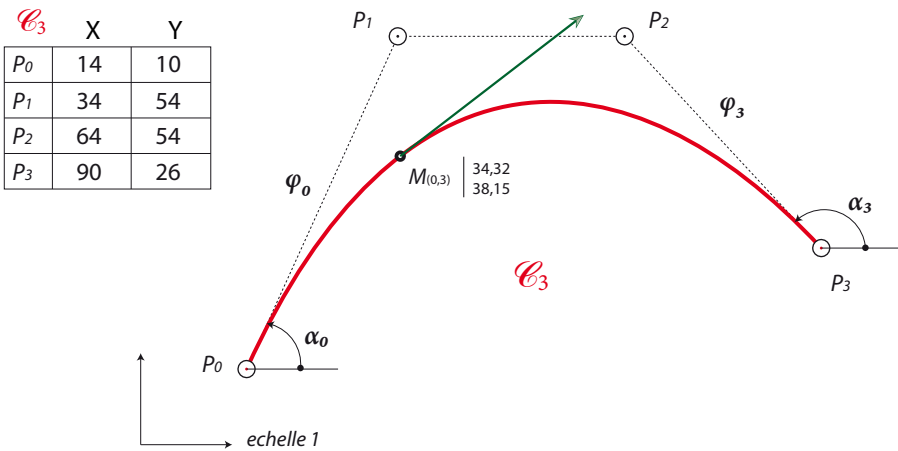
$$M'(t) \begin{cases} xM'(t) = 3[ (1-t)^2 (xP_1-xP_0) + 2t(1-t)(xP_2-xP_1) + t^2(xP_3-xP_2) ] \\ yM'(t) = 3[ (1-t)^2 (yP_1-yP_0) + 2t(1-t)(yP_2-yP_1) + t^2(yP_3-yP_2) ] \end{cases}$$

$$\overline{OM}''(t) = 6[ (1-t) (\overline{P_1P_0} + \overline{P_1P_2}) + t (\overline{P_2P_1} + \overline{P_2P_3}) ]$$

$$M''(t) \begin{cases} xM''(t) = 6[ (1-t) (xP_2-xP_0) + t (xP_1-2xP_2+xP_3) ] \\ yM''(t) = 6[ (1-t) (yP_2-yP_0) + t (yP_1-2yP_2+yP_3) ] \end{cases}$$

$$\overline{OM}'''(t) = 6[ (\overline{P_0P_3}) + 3(\overline{P_2P_1}) ]$$

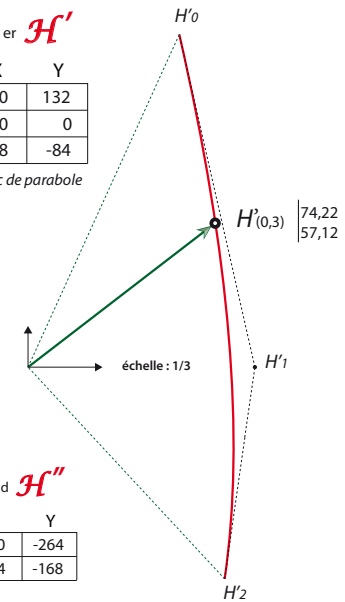
$$M'''(t) \begin{cases} xM'''(t) = 6[ xP_3-xP_0 + 3(xP_1-xP_2) ] \\ yM'''(t) = 6[ yP_3-yP_0 + 3(yP_1-yP_2) ] \end{cases}$$



Hodographe 1<sup>er</sup>  $\mathcal{H}'$

	X	Y
$H'_0 = 3(P_1-P_0)$	60	132
$H'_1 = 3(P_2-P_1)$	90	0
$H'_2 = 3(P_3-P_2)$	78	-84

dans ce cas c'est un arc de parabole



Hodographe 2<sup>d</sup>  $\mathcal{H}''$

	X	Y
$H''_0 = 2(H'_1-H'_0)$	60	-264
$H''_1 = 2(H'_2-H'_1)$	-24	-168

Les vecteurs  $\overline{P_0P_1}$  et  $\overline{P_3P_2}$  sont respectivement tangents à  $\mathcal{C}_3$  en  $P_0$  et  $P_3$

## b) Définition avec $P_0 P_1 P_2 P_3$ isolés .

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = (1-t)^3 xP_0 + 3t(1-t)^2 xP_1 + 3t^2(1-t) xP_2 + t^3 xP_3 \\ y = g(t) = (1-t)^3 yP_0 + 3t(1-t)^2 yP_1 + 3t^2(1-t) yP_2 + t^3 yP_3 \end{cases}$$

$$M'(t) \begin{cases} x' = f'(t) = -3[ (1-t)^2 xP_0 - (1-t)(1-3t) xP_1 - t(2-3t) xP_2 - t^2 xP_3 ] \\ y' = g'(t) = -3[ (1-t)^2 yP_0 - (1-t)(1-3t) yP_1 - t(2-3t) yP_2 - t^2 yP_3 ] \end{cases}$$

$$M''(t) \begin{cases} x'' = f''(t) = 6[ (1-t) xP_0 - (2-3t) xP_1 + (1-3t) xP_2 + t xP_3 ] \\ y'' = g''(t) = 6[ (1-t) yP_0 - (2-3t) yP_1 + (1-3t) yP_2 + t yP_3 ] \end{cases}$$

$$M'''(t) \begin{cases} x''' = f'''(t) = 6[ xP_3 - xP_0 + 3(xP_1 - xP_2) ] \\ y''' = g'''(t) = 6[ yP_3 - yP_0 + 3(yP_1 - yP_2) ] \end{cases}$$

## c) Définition vecteurs et contraintes .

En posant :  $\mathbf{V}_0 = \overline{OP}_0$  ;  $\mathbf{V}_1 = (\overline{OP}_1 - \overline{OP}_0)$  ;  $\mathbf{V}_2 = (\overline{OP}_2 - \overline{OP}_1)$  ;  $\mathbf{V}_3 = (\overline{OP}_3 - \overline{OP}_2)$

$$\overline{OM}(t) = \mathbf{V}_0 + (1-(1-t)^3) \mathbf{V}_1 + (3t^2-2t^3) \mathbf{V}_2 + t^3 \mathbf{V}_3$$

$$\overline{OM}'(t) = 3[(1-t)^2] \mathbf{V}_1 + 2t(1-t) \mathbf{V}_2 + t^2 \mathbf{V}_3$$

$$\overline{OM}''(t) = -6[(1-t) \mathbf{V}_1 - (1-2t) \mathbf{V}_2 - t \mathbf{V}_3]$$

$$\overline{OM}'''(t) = 6[ \mathbf{V}_1 - 2\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 ]$$

## c) Définition de $M(t)$ matriciellement

$$\begin{matrix} t & 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0,3 & 0,1 & 0,027 \\ 0,7 & 1 & 0,7 & 0,5 & 0,343 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{matrice de passage} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \begin{bmatrix} xP & yP \\ 14 & 10 \\ 34 & 54 \\ 64 & 54 \\ 90 & 26 \end{bmatrix} \\ (\overline{OP}) \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} xM(t) & yM(t) \\ 14,00 & 10,00 \\ 34,32 & 38,15 \\ 65,90 & 43,21 \\ 90,00 & 26,00 \end{bmatrix} \\ \overline{OM}(t) \end{matrix}$$

d) Définition canonique (selon les puissances de  $t$ )  $\Rightarrow \vec{OM}(t) = \vec{OC}_0 t^3 + \vec{OC}_1 t^2 + \vec{OC}_2 t + \vec{OC}_3$

Avec:  $x_{C_0} = x_3 = (x_{P_3} - x_{P_0} + 3(x_{P_1} - x_{P_2}))$

$x_{C_1} = x_2 = 3(x_{P_0} + x_{P_2} - 2x_{P_1})$

$x_{C_2} = x_1 = 3(x_{P_1} - x_{P_0})$

$x_{C_3} = x_0 = x_{P_0}$  (Resp. pour les  $y$ )

$x_{P_0} = x_0$

$x_{P_1} = \frac{x_1}{3} + x_{P_0}$

$x_{P_2} = \frac{x_2}{3} - x_{P_0} + 2x_{P_1}$

$x_{P_3} = x_3 + x_{P_0} - 3(x_{P_1} - x_{P_2})$  (Resp. pour les  $y$ )

Réciproquement

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = x_3 t^3 + x_2 t^2 + x_1 t + x_0 \\ y = g(t) = y_3 t^3 + y_2 t^2 + y_1 t + y_0 \end{cases} \quad M'(t) \begin{cases} x' = f'(t) = 3x_3 t^2 + 2x_2 t + x_1 \\ y' = g'(t) = 3y_3 t^2 + 2y_2 t + y_1 \end{cases} \quad M''(t) \begin{cases} x'' = f''(t) = 6x_3 t + 2x_2 \\ y'' = g''(t) = 6y_3 t + 2y_2 \end{cases} \quad M'''(t) \begin{cases} x''' = 6x_3 \\ y''' = 6y_3 \end{cases}$$

Donc dans notre exemple les points de  $\mathcal{C}_3$  sont aussi définis par:  $M(t) \begin{cases} x = f(t) = -14t^3 + 30t^2 + 60t + 14 \\ y = g(t) = 16t^3 - 132t^2 + 132t + 10 \end{cases}$

Et matriciellement avec:  $(\vec{OC}) = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad \vec{OM}(t) = {}^T(\vec{OC})\mathcal{I}_n$

e) Définition canonique avec  $P_1$  et  $P_3$  définis par coordonnées polaires\*

avec  $\alpha_0 =$  angle orienté  $P_0P_1$ ,  $\varphi_0 = \|P_0P_1\|$ ,  $\alpha_3 =$  angle orienté  $P_3P_2$ ,  $\varphi_3 = \|P_3P_2\|$

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = t^3 (2x_{P_0} + 3\varphi_0 \cos(\alpha_0) - 3\varphi_3 \cos(\alpha_3) - 2x_{P_3}) - 3t^2 (x_{P_0} + 2\varphi_0 \cos(\alpha_0) - \varphi_3 \cos(\alpha_3) - x_{P_3}) + 3t \varphi_0 \cos(\alpha_0) + x_{P_0} \\ y = g(t) = t^3 (2y_{P_0} + 3\varphi_0 \sin(\alpha_0) - 3\varphi_3 \sin(\alpha_3) - 2y_{P_3}) - 3t^2 (y_{P_0} + 2\varphi_0 \sin(\alpha_0) - \varphi_3 \sin(\alpha_3) - y_{P_3}) + 3t \varphi_0 \sin(\alpha_0) + y_{P_0} \end{cases}$$

e1) Avec  $P_1$  connus et fixe.

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = t^3 (-x_{P_0} + 3x_{P_1} - 3\varphi_3 \cos(\alpha_3) - 2x_{P_3}) + 3t^2 (x_{P_0} - 2x_{P_1} + \varphi_3 \cos(\alpha_3) + x_{P_3}) + 3t (x_{P_1} - x_{P_0}) + x_{P_0} \\ y = g(t) = t^3 (-y_{P_0} + 3y_{P_1} - 3\varphi_3 \sin(\alpha_3) - 2y_{P_3}) + 3t^2 (y_{P_0} - 2y_{P_1} + \varphi_3 \sin(\alpha_3) + y_{P_3}) + 3t (y_{P_1} - y_{P_0}) + y_{P_0} \end{cases}$$

e2) Avec  $P_2$  connus et fixe.

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = t^3 (2x_{P_0} + 3\varphi_0 \cos(\alpha_0) - 3x_{P_2} + x_{P_3}) - 3t^2 (x_{P_0} + 2\varphi_0 \cos(\alpha_0) - x_{P_2}) + 3t \varphi_0 \cos(\alpha_0) + x_{P_0} \\ y = g(t) = t^3 (2y_{P_0} + 3\varphi_0 \sin(\alpha_0) - 3y_{P_2} + y_{P_3}) - 3t^2 (y_{P_0} + 2\varphi_0 \sin(\alpha_0) - y_{P_2}) + 3t \varphi_0 \sin(\alpha_0) + y_{P_0} \end{cases}$$

f) Définition par coordonnées polaires avec  $P_0$  et  $P_3$  isolés.

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = (1-t)^2(2t+1) x_{P_0} + 3t(1-t)^2 \varphi_0 \cos(\alpha_0) + 3t^2(1-t) \varphi_3 \cos(\alpha_3) + t^2(3-2t)x_{P_3} \\ y = g(t) = (1-t)^2(2t+1) y_{P_0} + 3t(1-t)^2 \varphi_0 \sin(\alpha_0) + 3t^2(1-t) \varphi_3 \sin(\alpha_3) + t^2(3-2t)y_{P_3} \end{cases}$$

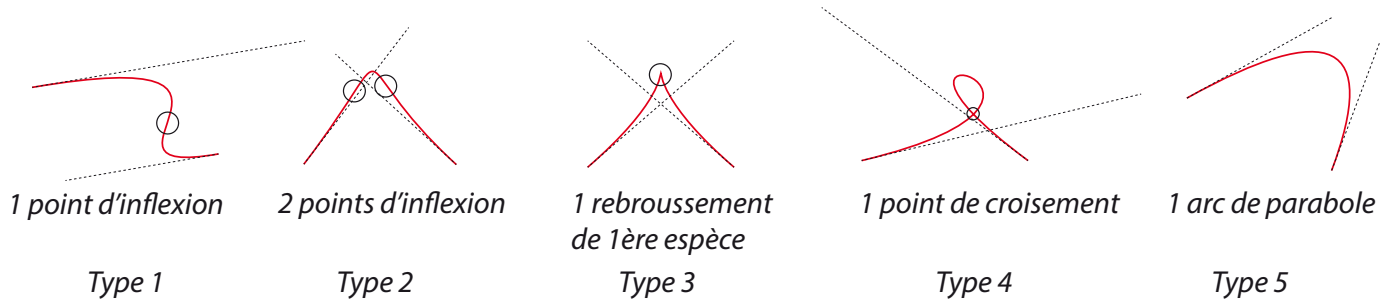
$$M'(t) \begin{cases} x' = f'(t) = 3 [ -2t(1-t) x_{P_0} + (1-t)(1-3t) \varphi_0 \cos(\alpha_0) + t(2-3t) \varphi_3 \cos(\alpha_3) + 2t(1-t)x_{P_3} ] \\ y' = g'(t) = 3 [ -2t(1-t) y_{P_0} + (1-t)(1-3t) \varphi_0 \sin(\alpha_0) + t(2-3t) \varphi_3 \sin(\alpha_3) + 2t(1-t)y_{P_3} ] \end{cases}$$

$$M''(t) \begin{cases} x'' = f''(t) = 6 [ -(1-2t) x_{P_0} - (2-3t) \varphi_0 \cos(\alpha_0) + (1-3t) \varphi_3 \cos(\alpha_3) + (1-2t)x_{P_3} ] \\ y'' = g''(t) = 6 [ -(1-2t) y_{P_0} - (2-3t) \varphi_0 \sin(\alpha_0) + (1-3t) \varphi_3 \sin(\alpha_3) + (1-2t)y_{P_3} ] \end{cases}$$

$$M'''(t) \begin{cases} x''' = f'''(t) = 6 [ 2x_{P_0} + 3\varphi_0 \cos(\alpha_0) - 3\varphi_3 \cos(\alpha_3) - 2x_{P_3} ] \\ y''' = g'''(t) = 6 [ 2y_{P_0} + 3\varphi_0 \sin(\alpha_0) - 3\varphi_3 \sin(\alpha_3) - 2y_{P_3} ] \end{cases}$$

\*Pour en savoir plus sur les angles orientés et les coordonnées polaires : voir pages 38 et 39

# les différents types de $B_3$



## $B_3$ spéciales (quelques exemples)

a) Courbe  $B_3$  qui est une portion de parabole

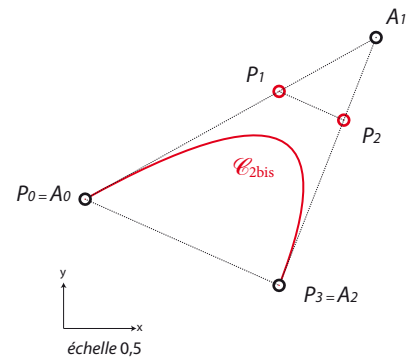
Dans la plupart des logiciels de dessin vectoriel seules les courbes de Bézier de degré 3 sont utilisées. Voici une méthode pour afficher un vrai segment de parabole avec une  $B_3$ .

Il faut que  $P_1$  soit au  $\frac{2}{3}$  de  $\overrightarrow{A_0A_1}$  et  $P_2$  au  $\frac{2}{3}$  de  $\overrightarrow{A_2A_1}$

$\mathcal{C}_2$	X	Y
$A_0$	6	36
$A_1$	87	81
$A_2$	60	12

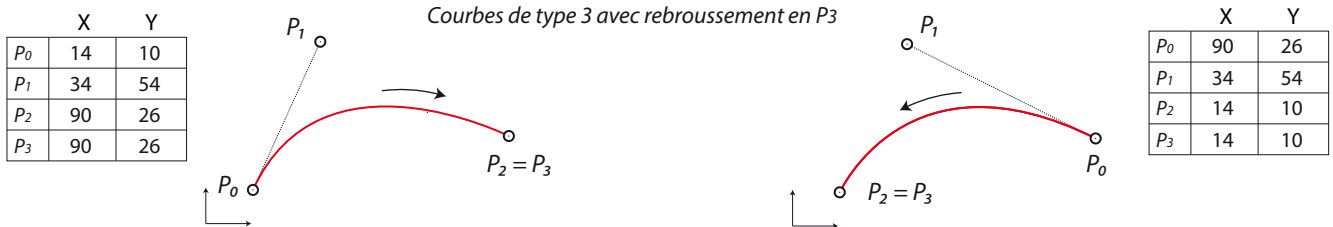
=

$\mathcal{C}_{2bis}$	X	Y
$P_0$	6	36
$P_1$	60	66
$P_2$	78	58
$P_3$	60	12



b) Courbe  $B_3$  définie par «3 points» utilisée dans le système Postscript.

La courbe est définie par  $P_0 P_1 P_2 P_3$  mais  $P_2$  est confondu avec  $P_3$ .

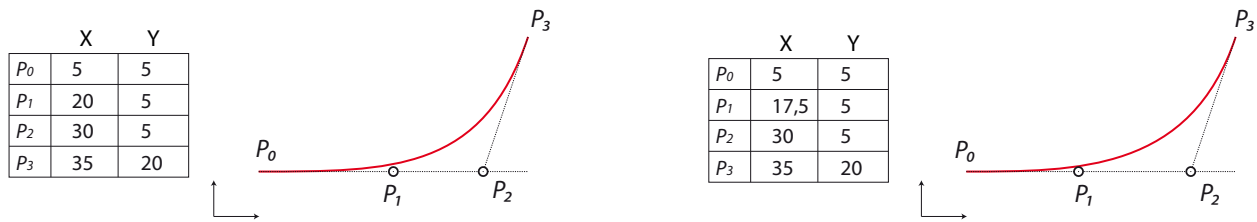


c) Courbe avec  $P_2$  sur la tangente  $P_0P_1$

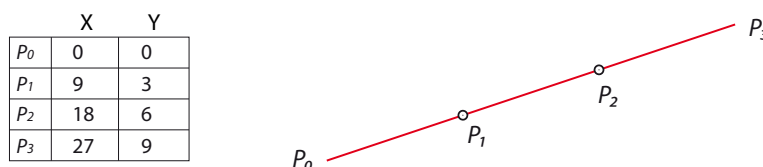
d) Courbe avec  $P_2$  sur la tangente  $P_0P_1$  et  $P_1$  au milieu de  $P_0P_2$

Courbe de type 2 avec deux inflexions dont une en  $P_0$

Courbe de type 1 avec une inflexion en  $P_0$



e) Droite définie par une  $B_3 \Rightarrow$  il faut que  $P_1$  soit à  $\frac{1}{3}$  de  $\overrightarrow{P_0P_3}$  et  $P_2$  à  $\frac{1}{3}$  de  $\overrightarrow{P_3P_0}$





## Changement des paramètres d'une $B_3$ par rotation et translation\*

Nous utiliserons la définition canonique d'une  $B_3$   $\Rightarrow M(t) \begin{cases} x = f(t) = x_3 t^3 + x_2 t^2 + x_1 t + x_0 \\ y = g(t) = y_3 t^3 + y_2 t^2 + y_1 t + y_0 \end{cases}$

Exemple avec une courbe "incliné" et ses hodographes

$\mathcal{C}_4$	X	Y
$P_0$	1	3
$P_1$	5	8
$P_2$	4	1
$P_3$	6	5

courbe de type 2

$$\mathcal{C}_4 \begin{cases} xM(t) = f(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 \\ yM(t) = g(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 \end{cases}$$

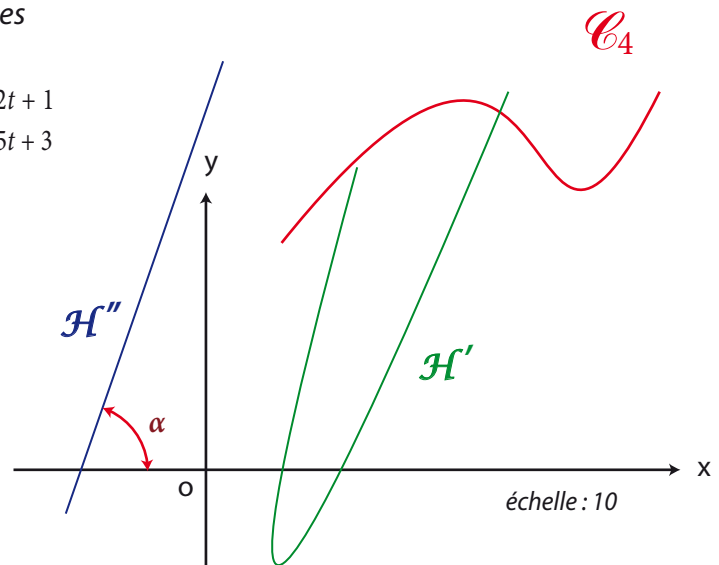
$$M''' \begin{cases} x''' = 6x_3 = 48 \\ y''' = 6y_3 = 132 \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{23}{8} \Rightarrow \alpha \approx 70,821^\circ$$

$$\vec{b} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{-36}{-15} \Rightarrow \beta \approx 67,380^\circ$$

$$\vec{c} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{15}{12} \Rightarrow \gamma \approx 51,340^\circ$$

$$\vec{d} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{3}{1} \Rightarrow \delta \approx 71,565^\circ$$



**NB** : les angles  $\alpha, \beta, \dots$  ne doivent pas être orientés

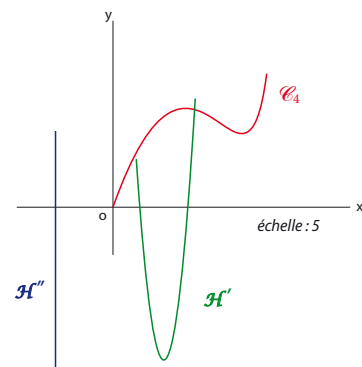
Méthode pour "redresser" et simplifier une courbe  $B_3$  par rotation et translation :

Appliquer une rotation\* de  $(\frac{\pi}{2} - \alpha) \approx 19,179^\circ$  de centre  $P_0|_3^1$  et une translation de  $-P_0|_{-3}^{-1}$

$$\approx$$

$\mathcal{C}_4$	X	Y
$P_0$	0	0
$P_1$	2,14	6,04
$P_2$	3,49	-0,90
$P_3$	4,07	3,53

$$\mathcal{C}_4 \begin{cases} f(t) \approx 0 t^3 - 2,34 t^2 + 6,41 t + 0 \\ g(t) \approx 24,35 t^3 - 38,93 t^2 + 18,11 t + 0 \end{cases}$$



Avec une rotation de  $-\alpha$  c'est le coefficient  $y_3$  qui sera nul.

De la même manière une rotation impliquant  $\beta$  les coef.  $x_2$  ou  $y_2$  seront = 0 etc...

En fait l'invariance affine du paramètre  $t$  autorise ces changements.

Cela veut dire que quelque soit l'orientation de la courbe sur  $\mathbb{R}^2$  le paramètre  $t$  ne change pas.

Cette astuce n'est pas à négliger.

Elle permet, entre autre, de déterminer le point de croisement d'une  $B_3$  de type 4 (voir page 15)  
aussi le calcul du foyer d'une parapole (voir page 13)

\*Rotation à l'aide de la formule du changement de base (modifiée) voir page 36

# Intersection d'une droite avec une B3, calcul du paramètre t

## Exemples

∩ avec par exemple une droite d'équation  $x = 2$  ou  $y = 4,5$

∩ avec une droite définie par un point E et son coefficient directeur a

Exemple 1 avec C4 et L | 2

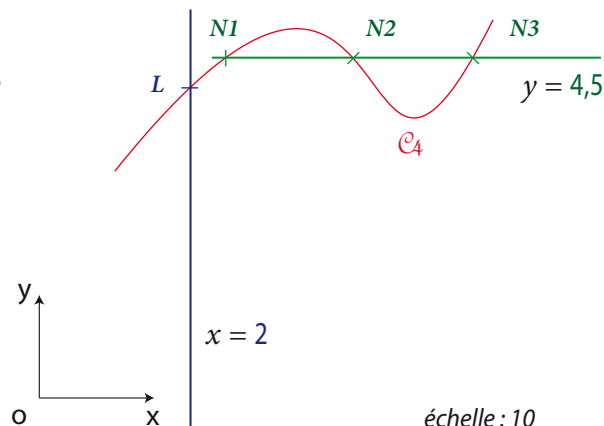
C4	X	Y
P0	1	3
P1	5	8
P2	4	1
P3	6	5

$$C4 \begin{cases} xM(t) = f(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 \\ yM(t) = g(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 \end{cases}$$

$$xM(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 = 2$$

Donc il faut résoudre : \*  $8t^3 - 15t^2 + 12t - 1 = 0$

=> 1 solution réelle :  $t \approx 0,0938 \Rightarrow L \begin{vmatrix} 2 \\ 4,11 \end{vmatrix}$



Exemple 2 avec C4 et N | 4,5

en développant =>  $yM(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 = 4,5$

$$23t^3 - 36t^2 + 15t - 1,5 = 0 \Rightarrow 3 \text{ solutions réelles :}$$

$t_1 \approx 0,1470$	$t_2 \approx 0,4660$	$t_3 \approx 0,9523$
$N1 \begin{vmatrix} 2,47 \\ 4,5 \end{vmatrix}$	$N2 \begin{vmatrix} 4,14 \\ 4,5 \end{vmatrix}$	$N3 \begin{vmatrix} 5,73 \\ 4,5 \end{vmatrix}$

## Intersection avec une droite définie par un point E et son coefficient directeur a

Exemple 3

avec  $M(t) \begin{cases} x = f(t) = x_3t^3 + x_2t^2 + x_1t + x_0 \\ y = g(t) = y_3t^3 + y_2t^2 + y_1t + y_0 \end{cases} E \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} a = 1$

=>  $C4 \begin{cases} xM(t) = f(t) = 8t^3 - 15t^2 + 12t + 1 \\ yM(t) = g(t) = 23t^3 - 36t^2 + 15t + 3 \end{cases}$

Résoudre :  $\frac{yC4 - yE}{xC4 - xE} = a$

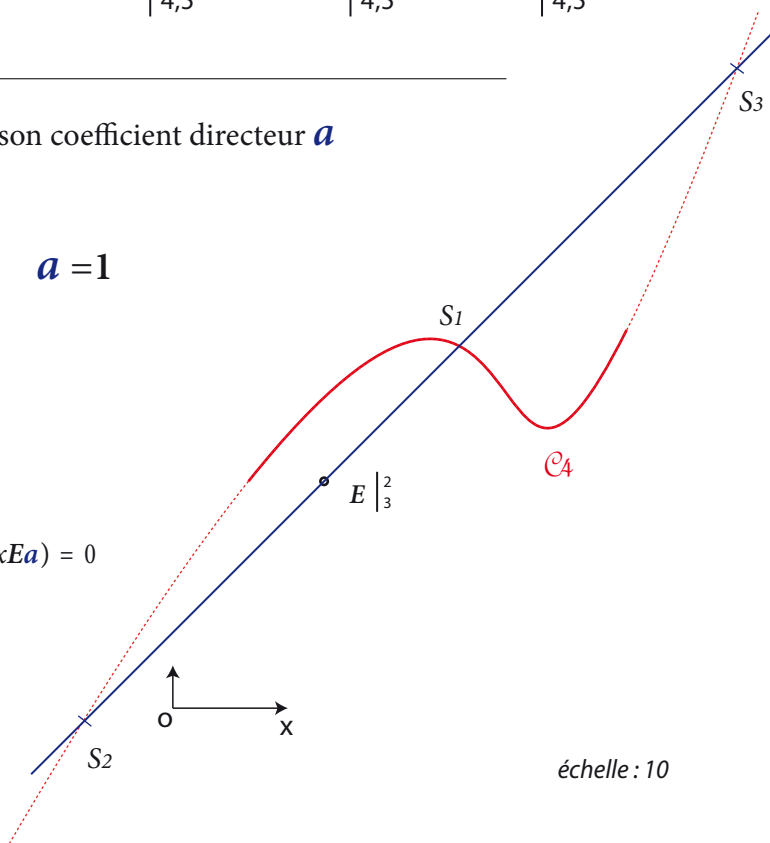
=>  $(y_3 - ax_3)t^3 + (y_2 - ax_2)t^2 + (y_1 - ax_1)t + (y_0 - ax_0 - yE + xEa) = 0$

=>  $15t^3 - 21t^2 + 3t + 1 = 0$

=> 3 solutions réelles :

$t_1 \approx 0,3692 \quad t_2 \approx -0,1526 \quad t_3 \approx 1,1834$

$S1 \begin{vmatrix} 3,78 \\ 4,78 \end{vmatrix} \quad S2 \begin{vmatrix} -1,21 \\ -0,21 \end{vmatrix} \quad S3 \begin{vmatrix} 7,45 \\ 8,45 \end{vmatrix}$



## Intersection de 2 B3

Un algorithme s'impose => <https://pomax.github.io/bezierinfo/#intersections>

\* pour résoudre une équation du 3ème degré allez sur les page 34 et 35

## Estimation du paramètre $t$

Dans certains calculs, il est parfois nécessaire d'estimer le paramètre  $t$  d'un ou plusieurs points  $M$ .

Exemple avec la *méthode des normes*

$$\text{soit : } \|PoP_3\| \approx 49,82 \quad \|PoM_1\| \approx 16,13 \quad \|PoM_2\| \approx 35,47$$

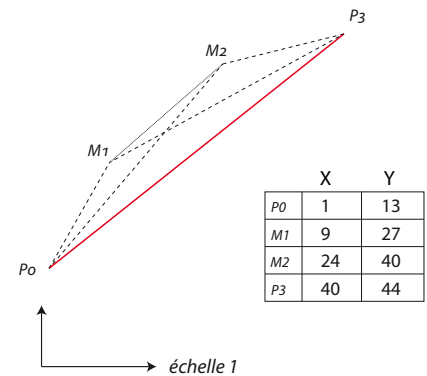
$$t_{(M_1)} = \frac{\|PoM_1\|}{\|PoP_3\|} \approx 0,3237 \quad t_{(M_2)} = \frac{\|PoM_2\|}{\|PoP_3\|} \approx 0,7119$$

$$\text{Et aussi avec : } \|PoP_3\| \approx 49,82 \quad \|P_3M_1\| \approx 35,36 \quad \|P_3M_2\| \approx 16,49$$

$$t_{(M_1)} = 1 - \frac{\|P_3M_1\|}{\|PoP_3\|} \approx 0,2903 \quad t_{(M_2)} = 1 - \frac{\|P_3M_2\|}{\|PoP_3\|} \approx 0,6690$$

$$t_{(M_1)} \text{ moyen} \approx 0,3070$$

$$t_{(M_2)} \text{ moyen} \approx 0,6905$$



## Conversion d'une B-spline (cubique) en $B_3$

Equations d'une B-spline avec ses points de contrôle :  $Q_0 Q_1 Q_2 Q_3$

$$M(t) \begin{cases} xM(t) = \frac{1}{6} [ (1-t)^3 xQ_0 + (3t^3 - 6t^2 + 4) xQ_1 + (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) xQ_2 + t^3 xQ_3 ] \\ yM(t) = \frac{1}{6} [ (1-t)^3 yQ_0 + (3t^3 - 6t^2 + 4) yQ_1 + (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) yQ_2 + t^3 yQ_3 ] \end{cases}$$

B-spline

	X	Y
Q0	3	5
Q1	24	35
Q2	63	23
Q3	78	-7

Equations d'une courbe de Bézier avec ses points de définition :  $P_0 P_1 P_2 P_3$

$$M(t) \begin{cases} xM(t) = (1-t)^3 xP_0 + 3t(1-t)^2 xP_1 + 3t^2(1-t) xP_2 + t^3 xP_3 \\ yM(t) = (1-t)^3 yP_0 + 3t(1-t)^2 yP_1 + 3t^2(1-t) yP_2 + t^3 yP_3 \end{cases}$$

Bézier

	X	Y
P0	27	28
P1	37	31
P2	50	27
P3	59	20

conversion B-Spline en  $B_3$

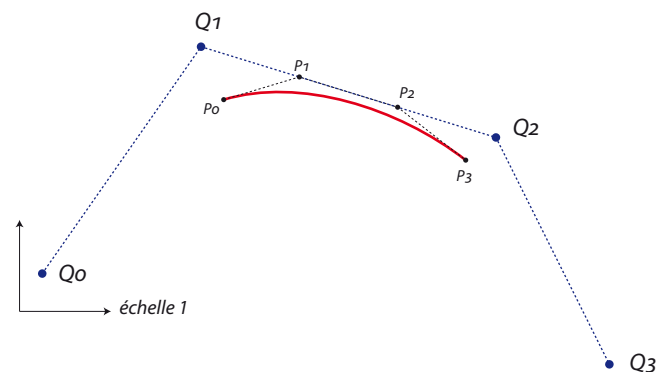
$$\begin{aligned} xP_0 &= \frac{1}{6} (xQ_0 + 4xQ_1 + xQ_2) \\ xP_1 &= \frac{1}{6} (4xQ_1 + 2xQ_2) \\ xP_2 &= \frac{1}{6} (2xQ_1 + 4xQ_2) \\ xP_3 &= \frac{1}{6} (xQ_1 + 4xQ_2 + xQ_3) \end{aligned}$$

idem pour les  $y$

conversion  $B_3$  en B-Spline

$$\begin{aligned} xQ_0 &= (6xP_0 - 7xP_1 + 2xP_2) \\ xQ_1 &= (2xP_1 - xP_2) \\ xQ_2 &= (-xP_1 + 2xP_2) \\ xQ_3 &= (2xP_1 - 7xP_2 + 6xP_3) \end{aligned}$$

idem pour les  $y$



## Parabole (B<sub>2</sub>) : calcul de son axe **A**, son sommet **S** et son foyer **F**

Calcul du sommet **S** avec  $\mathcal{H}'' \left| \begin{array}{l} x'' = -216 \\ y'' = -228 \end{array} \right.$

le coef dir. de l'axe **A** de la parabole =  $\vec{a} = \frac{y\mathcal{H}''}{x\mathcal{H}''}$  La tangente au sommet **S** =  $\vec{d} = -\frac{1}{\vec{a}} = -\frac{x\mathcal{H}''}{y\mathcal{H}''}$

calcul du paramètre **t** du sommet **S** avec :  $M'(t) \left| \begin{array}{l} x' = f'(t) = 2t(xP_0 - 2xP_1 + xP_2) + 2(xP_1 - xP_0) \\ y' = g'(t) = 2t(yP_0 - 2yP_1 + yP_2) + 2(yP_1 - yP_0) \end{array} \right.$

$$\vec{d} = \frac{2t(yP_0 - 2yP_1 + yP_2) + 2(yP_1 - yP_0)}{2t(xP_0 - 2xP_1 + xP_2) + 2(xP_1 - xP_0)} \quad \text{donc } t_{(\text{sommet})} = \frac{(yP_1 - yP_0) - \vec{d}(xP_1 - xP_0)}{\vec{d}(xP_0 - 2xP_1 + xP_2) - (yP_0 - 2yP_1 + yP_2)}$$

Exemple

avec

$\mathcal{C}_2$	X	Y
P <sub>0</sub>	6	36
P <sub>1</sub>	87	81
P <sub>2</sub>	60	12

 $\mathcal{C}_2 \left| \begin{array}{l} xM(t) = -108t^2 + 162t + 6 \\ yM(t) = -114t^2 + 90t + 36 \end{array} \right.$ 

$$\vec{a} = \frac{-228}{-216} \quad \vec{d} = -\frac{216}{228} \quad \text{donc } t_{(\text{sommet})} \approx 0,5627737 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} \left| \begin{array}{l} x\mathbf{S}(t_{\text{sommet}}) \approx 62,964 \\ y\mathbf{S}(t_{\text{sommet}}) \approx 50,544 \end{array} \right.$$

### Calcul du foyer **F** (méthode indirecte) [1]

Il convient de noter que l'intersection\* d'une tangente à  $\mathcal{C}_2$  (par exemple P<sub>2</sub>P<sub>1</sub>) avec l'axe **A** détermine **L**

Le foyer **F** sera déterminé par l'intersection de la médiatrice de P<sub>2</sub>**L** avec l'axe **A**.

NB : **M** est le point milieu du segment P<sub>2</sub>**L**

Exemple

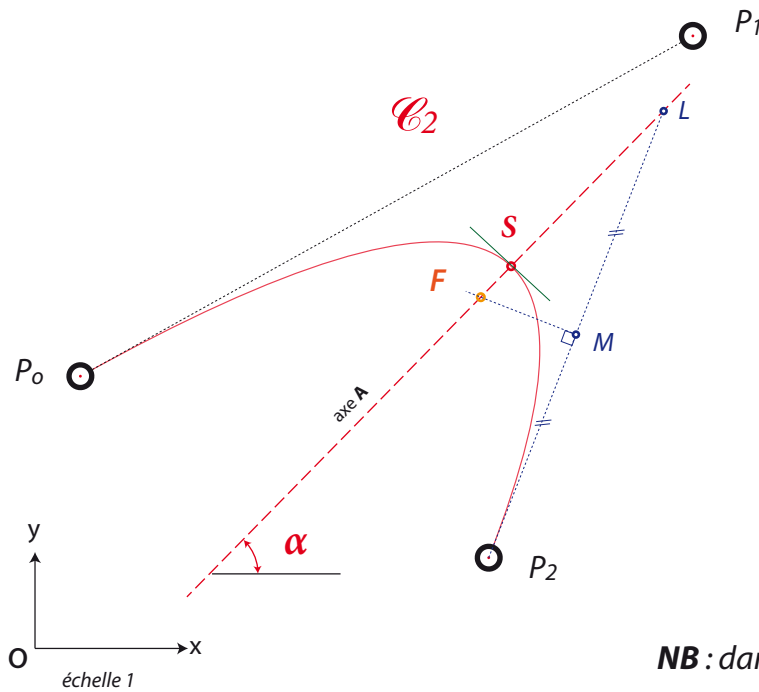
$$\mathbf{L} = (\mathbf{S} ; \vec{a}) \cap \overrightarrow{P_2P_1}$$

	X	Y	coef dir.
P <sub>2</sub>	60	12	2,5556 (coef dir. de $\overrightarrow{P_2P_1}$ )
<b>S</b>	62,964	50,544	1,0556 ( <b>a</b> )
<b>L</b>	83,61	72,34	

$$\mathbf{F} = (\mathbf{S} ; \vec{a}) \cap \text{médiatrice de } \overrightarrow{P_2L}$$

	X	Y	coef dir.
<b>S</b>	62,564	50,544	1,0556 ( <b>a</b> )
<b>M</b>	71,81	42,17	-0,3913 (-1 ÷ 25556)
<b>F</b>	59,566	46,958	

\* voir page 37 intersection avec la formule de Delambre



$$C_2 \begin{cases} xM(t) = -108t^2 + 162t + 6 \\ yM(t) = -114t^2 + 90t + 36 \end{cases}$$

$$S \begin{cases} 62,964 \\ 50,544 \end{cases}$$

$$\alpha = \arctan(\vec{a}) \approx 46,5482^\circ$$

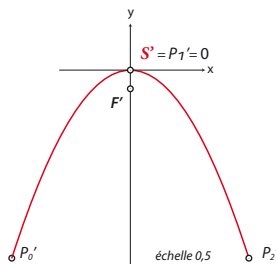
**NB :** dans ce cas l'angle  $\alpha$  ne doit pas être orienté

### Calcul du foyer $F$ «méthode directe»

Dans un premier temps il faut que le sommet de la parabole soit à l'origine du repère orthonormé, et son axe  $A$  doit coïncider avec l'axe  $OY$ .

Nous allons donc effectuer un changement de base avec une rotation de  $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

dont le centre de rotation  $\Omega$  est le sommet  $S$  et appliquer une translation de:  $-xS$   $-yS$



Donc dans ce cas la avec  $\Omega = S$   $\begin{cases} \Delta x \approx -62,964 \\ \Delta y \approx -50,544 \end{cases}$

$$P_0' \begin{cases} xP_0' = \cos(\alpha)(xP_0 - xS) - \sin(\alpha)(yP_0 - yS) \approx -31,351 \\ yP_0' = \sin(\alpha)(xP_0 - xS) + \cos(\alpha)(yP_0 - yS) \approx -49,735 \end{cases}$$

$$P_2' \text{ est la symétrique de } P_0' \begin{cases} xP_2' \approx 31,351 \\ yP_2' \approx -49,735 \end{cases} \quad P_1' = S' = 0$$

En interpolant les points  $P_0'$ ,  $P_1'$ ,  $P_2'$  par la méthode de Newton  $\Rightarrow N_1 = \frac{yP_0' - yP_1'}{xP_0' - xP_1'} = \frac{yP_0'}{xP_0'}$   $N_2 = \frac{yP_1' - yP_2'}{xP_1' - xP_2'} = \frac{-yP_2'}{-xP_2'}$

le paramètre  $a$  de la parabole  $= \frac{N_1 - N_2}{xP_0' - xP_2'} = \frac{yP_0'}{(xP_0')^2} \approx -0,05060 \Rightarrow F' \begin{cases} xF' = 0 \\ yF' = \frac{1}{4a} = \frac{(xP_0')^2}{4yP_0'} \approx -4,9405 \end{cases}$

Retour à la base initiale en posant:  $F \begin{cases} xF = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)(xF' - x\Omega - \Delta x) + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)(yF' - y\Omega - \Delta y) + x\Omega = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)yF' + xS \\ yF = -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)(xF' - x\Omega - \Delta x) + \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)(yF' - y\Omega - \Delta y) + y\Omega = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)yF' + yS \end{cases}$

Donc directement avec:  $S$ ,  $A = (xP_0 - xS)$ ,  $B = (yP_0 - yS)$  et  $yF' = \frac{(xP_0')^2}{4yP_0'}$

$$F \begin{cases} xF = \cos(\alpha)(yF') + xS = \frac{(\sin(\alpha)A - \cos(\alpha)B)^2}{4(A + \cotan(\alpha)B)} + xS \\ yF = \sin(\alpha)(yF') + yS = \frac{(\sin(\alpha)A - \cos(\alpha)B)^2}{4(\tan(\alpha)A + B)} + yS \end{cases}$$

**NB :** le calcul de  $F$  peut se faire sur  $\mathbb{R}^2$  avec  $P_0 = n'$  importe quel point de la parabole hormis son sommet.

# Points stationnaires et de croisement d'une B3 [1]

Pour déterminer ces points utilisons la formule suivante : le déterminant  $[B_3'(t), B_3''(t)] = 0$

Avec :  $B_3' \Rightarrow \begin{cases} x' = f'(t) = 3x_3t^2 + 2x_2t + x_1 \\ y' = g'(t) = 3y_3t^2 + 2y_2t + y_1 \end{cases}$  et  $B_3'' \Rightarrow \begin{cases} x'' = f''(t) = 6x_3t + 2x_2 \\ y'' = g''(t) = 6y_3t + 2y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} f'(t) & f''(t) \\ g'(t) & g''(t) \end{bmatrix} \Rightarrow f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t) = 0$

En développant :  $\Rightarrow (x_2y_3 - x_3y_2)t^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)t + (x_1y_2 - x_2y_1)/3 = At^2 + Bt + C = 0$

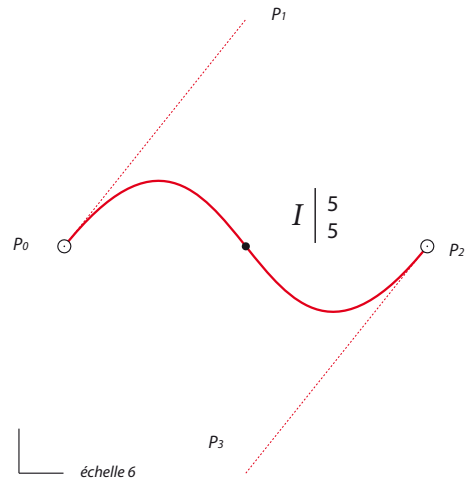
Si  $\Delta > 0$  et  $A = 0 \Rightarrow$  1 pt d'inflexion      Si  $\Delta = 0 \Rightarrow$  1 pt rebroussement      Si  $A = 0$  et  $B = 0 \Rightarrow$  1 arc de parabole  
 Si  $\Delta > 0$  et  $A \neq 0 \Rightarrow$  2 pts d'inflexions      Si  $\Delta < 0 \Rightarrow$  1 pt croisement

## 1) courbe de type 1 (avec un point d'inflexion)

$\mathcal{C}_{31}$

	X	Y
$P_0$	1	5
$P_1$	5	10
$P_2$	5	0
$P_3$	9	5

$\mathcal{C}_{31} \begin{cases} f(t) = 8t^3 - 12t^2 + 12t + 1 \\ g(t) = 30t^3 - 45t^2 + 15t + 5 \end{cases}$



$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 0t^2 + 240t - 120 = 0 \quad (\Delta = 57600 \text{ et } A=0)$   
 $\Rightarrow t = 0,5$

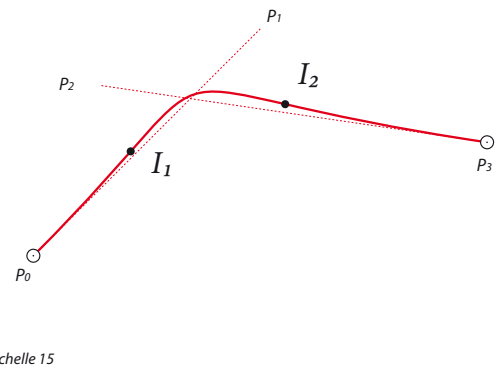
1 point d'inflexion en  $I_{(0,5)} \begin{vmatrix} 5 \\ 5 \end{vmatrix}$

## 2) courbe de type 2 (avec deux points d'inflexions)

$\mathcal{C}_{32}$

	X	Y
$P_0$	1	1
$P_1$	3	3
$P_2$	1.6	2.5
$P_3$	5	2

$\mathcal{C}_{32} \begin{cases} f(t) = 8,2t^3 - 10,2t^2 + 6t + 1 \\ g(t) = 2,5t^3 - 7,5t^2 + 6t + 1 \end{cases}$



$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 36t^2 - 34,2t + 5,4 = 0 \quad (\Delta = 36)$   
 $\Rightarrow t_1 \approx 0,2 \quad t_2 \approx 0,75$

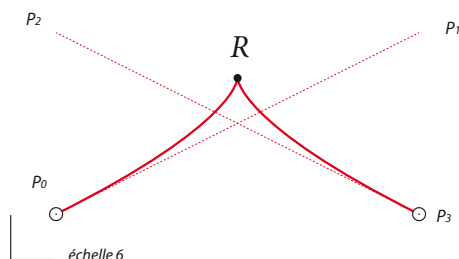
2 points d'inflexions en  $I_1 \begin{vmatrix} 1,858 \\ 1,920 \end{vmatrix} \quad I_2 \begin{vmatrix} 3,222 \\ 2,336 \end{vmatrix}$

## 3) courbe de type 3 (avec un point de rebroussement de 1ère espèce)

$\mathcal{C}_{33}$

	X	Y
$P_0$	1	1
$P_1$	9	5
$P_2$	1	5
$P_3$	9	1

$\mathcal{C}_{33} \begin{cases} f(t) = 32t^3 - 48t^2 + 24t + 1 \\ g(t) = 0t^3 - 12t^2 + 12t + 1 \end{cases}$



$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 384t^2 - 384t + 96 = 0 \quad (\Delta = 0)$   
 $\Rightarrow t = 0,5 \quad 1 \text{ rebroussement en } R \begin{vmatrix} 5 \\ 4 \end{vmatrix}$

4) courbe de type 4 (avec un point de croisement ou point double)

$\mathcal{C}_{34}$

	X	Y
$P_0$	4	2
$P_1$	7	6
$P_2$	1	4
$P_3$	7	3

$\mathcal{C}_{34} \left| \begin{array}{l} f(t) = 21t^3 - 27t^2 + 9t + 4 \\ g(t) = 7t^3 - 18t^2 + 12t + 2 \end{array} \right. \quad x'y'' - y'x'' \Rightarrow 189t^2 - 189t + 54 = 0 \quad (\Delta = -5103)$

Calcul du point double  $\mathcal{D} \left| \begin{array}{l} f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow x_3t_1^3 + x_2t_1^2 + x_1t_1 + x_0 = x_3t_2^3 + x_2t_2^2 + x_1t_2 + x_0 \\ g(t_1) = g(t_2) \Rightarrow y_3t_1^3 + y_2t_1^2 + y_1t_1 + y_0 = y_3t_2^3 + y_2t_2^2 + y_1t_2 + y_0 \end{array} \right.$

$f(t_1) - f(t_2) = 0 \Rightarrow x_3(t_1^3 - t_2^3) + x_2(t_1^2 - t_2^2) + x_1(t_1 - t_2) = 0$

A l'aide des identités remarquables suivantes :  $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$  et  $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$\Rightarrow x_3(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) + x_2(t_1 - t_2)(t_1 + t_2) + x_1(t_1 - t_2) = 0$

Donc  $x_3(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + x_2(t_1 + t_2) + x_1 = 0$

A présent le but est de définir  $t_2$  à partir de  $t_1$ , nous allons donc faire en sorte que :  $x_3 = 0$

Comme expliqué à la page 9 nous allons changer certains paramètres l'équation :  $x_3(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + x_2(t_1 + t_2) + x_1 = 0$

En sachant que  $\tan(\alpha) = \frac{y_3}{x_3}$  et à l'aide de la formule du changement de base, appliquons une rotation de  $(\frac{\pi}{2}, \alpha)$  sur l'équation concernée.

avec :  $X_2 = x_2 \sin(\alpha) - y_2 \cos(\alpha)$  et  $X_1 = x_1 \sin(\alpha) - y_1 \cos(\alpha) \Rightarrow 0(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + X_2(t_1 + t_2) + X_1 = 0 \Rightarrow t_2 = -\frac{X_1}{X_2} - t_1$

Résoudre  $\left\{ \begin{array}{l} x_3(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + x_2(t_1 + t_2) + x_1 = 0 \\ t_2 = -\frac{X_1}{X_2} - t_1 \end{array} \right.$  avec  $G = \frac{X_1}{X_2} = \frac{x_2 \tan(\alpha) - y_2}{x_1 \tan(\alpha) - y_1} = \frac{x_1 \frac{y_3}{x_3} - y_1}{x_2 \frac{y_3}{x_3} - y_2} = \frac{x_1 y_3 - y_1 x_3}{x_2 y_3 - y_2 x_3}$

$\Rightarrow \frac{t_1^2}{G} + t_1 + G + \frac{x_1}{x_3 G} - \frac{x_2}{x_3} = 0$  ou  $t_1^2 + Gt_1 + G^2 + \frac{x_1 - x_2 G}{x_3} = 0$

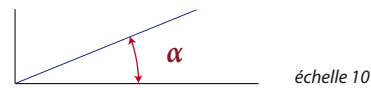
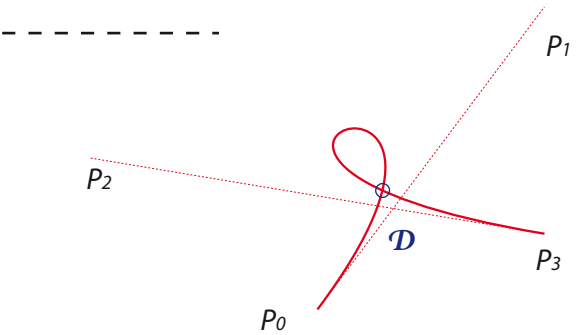
Exemple avec  $\mathcal{C}_{34} \left| \begin{array}{l} f(t) = 21t^3 - 27t^2 + 9t + 4 \\ g(t) = 7t^3 - 18t^2 + 12t + 2 \end{array} \right.$

$\Rightarrow G = -1$

$\Rightarrow -t^2 + t - \frac{1}{7} = 0 \quad (\Delta = \frac{3}{7})$

$\Rightarrow t_1 \approx 0,1727 \quad t_2 \approx 0,8273$

1 point de croisement en  $\mathcal{D} \left| \begin{array}{l} 4,857 \\ 3,571 \end{array} \right.$



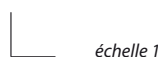
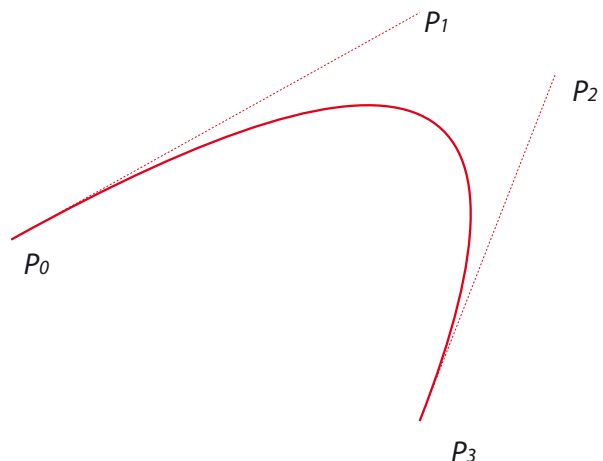
5) courbe de type 5 (arc de parabole)

Exemple  $\mathcal{C}_2$

	X	Y
$P_0$	6	36
$P_1$	60	66
$P_2$	78	58
$P_3$	60	12

$\mathcal{C}_2 \left| \begin{array}{l} f(t) = 0t^3 - 108t^2 + 162t + 6 \\ g(t) = 0t^3 - 114t^2 + 90t + 36 \end{array} \right.$

$x'y'' - y'x'' \Rightarrow 0t^2 + 0t - 2916 = 0$



## Subdivisions récursives d'une B2 avec la méthode de "De Casteljaou" [1]

Cette méthode permet de calculer les coordonnées d'un point  $M(t)$  sans passer par les équations de Bézier

Les points  $A_0 A_1 A_2$  définissent la courbe  $\mathcal{C}_2$   
 et  $M$  un point de cette courbe de paramètre  $t = 0,4$

$$Q_1 = (1-t)A_0 + t A_1 \quad \text{ou} \quad t(A_1 - A_0) + A_0$$

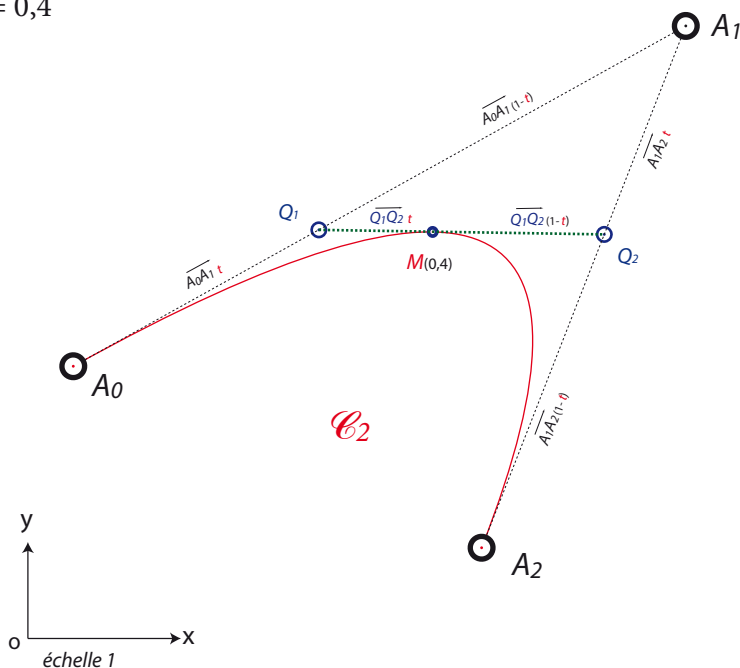
$$Q_2 = (1-t)A_1 + t A_2 \quad \text{ou} \quad t(A_2 - A_1) + A_1$$

$$M = (1-t)Q_1 + t Q_2 \quad \text{ou} \quad t(Q_2 - Q_1) + Q_1$$

$\mathcal{C}_2$	X	Y
$A_0$	6	36
$A_1$	87	81
$A_2$	60	12

donc avec  $t = 0,4$

	X	Y
$Q_1$	38,4	54
$Q_2$	76,2	53,4
$M$	53,52	53,76



## Subdivisions récursives d'une B3

Les points  $P_0 P_1 P_2 P_3$  sont les points de définitions de  $\mathcal{C}_3$   
 et  $M$  un point de cette courbe de paramètre  $t = 0.4$

$$Q_1 = (1-t)P_0 + t P_1$$

$$Q_2 = (1-t)P_1 + t P_2$$

$$Q_3 = (1-t)P_2 + t P_3$$

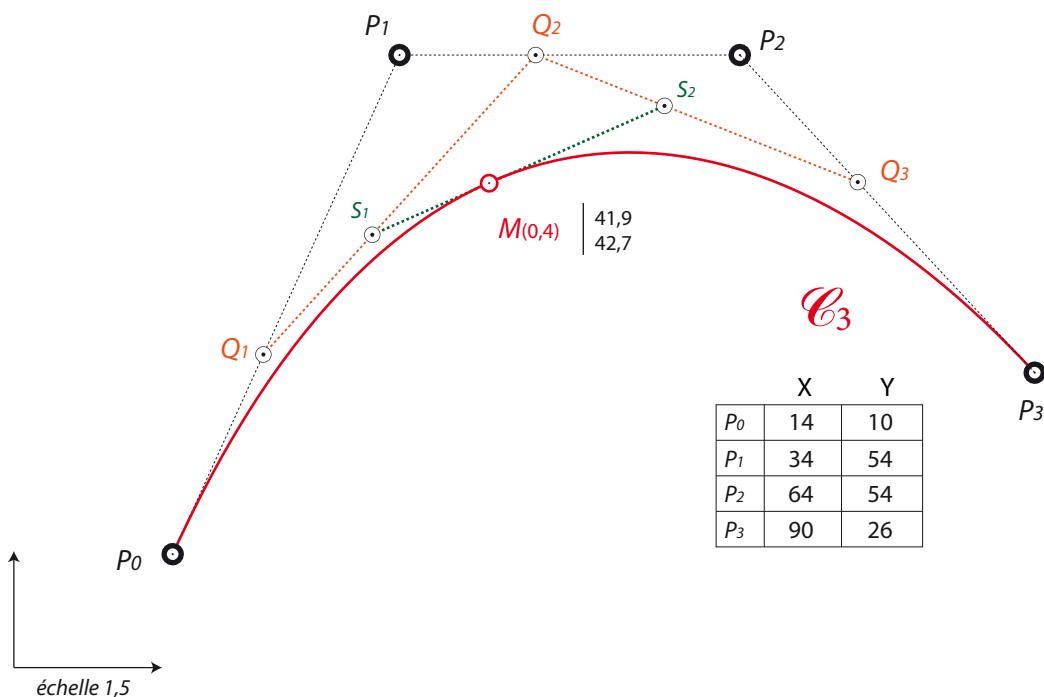
$$S_1 = (1-t)Q_1 + t Q_2$$

$$S_2 = (1-t)Q_2 + t Q_3$$

$$M = (1-t)S_1 + t S_2$$

donc avec  $t = 0.4$

	X	Y
$Q_1$	22	27,6
$Q_2$	46	54
$Q_3$	74,4	42,8
$S_1$	31,6	38,2
$S_2$	57,4	49,5
$M$	41,9	42,7



Et de ce fait nous pouvons diviser la courbe  $\mathcal{C}_3$  en  $M(0,4) \Rightarrow 2$  courbes définies par :  
 $\mathcal{C}_{3a}$   $P_0 Q_1 S_1 M$   
 $\mathcal{C}_{3b}$   $M S_2 Q_3 P_3$



# Quelques applications pour une $B_3$

Méthode pour subdiviser une  $B_3$  en un point  $M(t)$

Exemple avec  $\mathcal{C}_3$  et un point de subdivision  $M$  de paramètre  $t = 0,4$

$\mathcal{C}_3$

	X	Y
$P_0$	14	10
$P_1$	34	54
$P_2$	64	54
$P_3$	90	26

$$A_0 = P_0$$

$$A_1 = t(P_1 - P_0) + P_0$$

$$A_2 = t[t(P_2 - P_1) + P_1 - A_1] + A_1$$

$$A_3 = M(t)$$

avec  $t = 0,4$

$$B_0 = M(t)$$

$$B_1 = (1-t)[t(P_2 - P_1) + P_1 - B_2] + B_2$$

$$B_2 = t(P_3 - P_2) + P_2$$

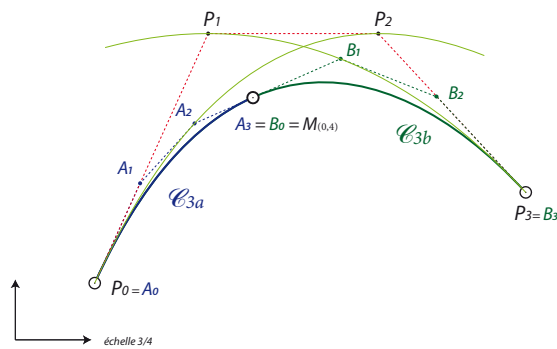
$$B_3 = P_3$$

$\mathcal{C}_{3a}$

	X	Y
$A_0$	14	10
$A_1$	22	27,6
$A_2$	31,6	38,160
$A_3$	41,904	42,704

$\mathcal{C}_{3b}$

	X	Y
$B_0$	41,904	42,704
$B_1$	57,360	49,552
$B_2$	74,4	42,8
$B_3$	90	26



Remarquons que  $A_2$  est sur la parabole définie par  $P_0P_1P_2$  et  $B_1$  sur  $P_1P_2P_3$

Méthode pour prolonger une  $B_3$  jusqu'au point  $M$  de paramètre  $t > 1$

Exemple avec  $\mathcal{C}_{3a}$  et  $t = 2$

$\mathcal{C}_{3a}$

	X	Y
$A_0$	14	10
$A_1$	22	27,6
$A_2$	31,6	38,160
$A_3$	41,904	42,704

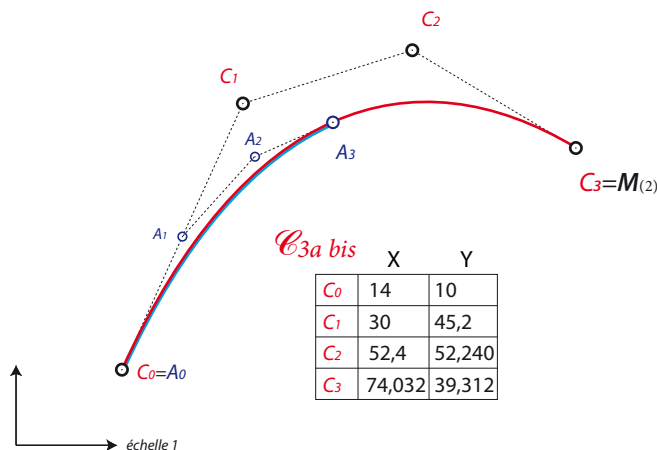
$t$  de  $M = 2$  donc  $M(2) \left| \begin{array}{l} 74,032 \\ 39,312 \end{array} \right.$

$$C_0 = A_0$$

$$C_1 = t(A_1 - A_0) + A_0$$

$$C_2 = (1-t)C_1 + t(1-t)A_1 + t^2A_2$$

$$C_3 = M(t)$$



$\mathcal{C}_{3a}$  bis

	X	Y
$C_0$	14	10
$C_1$	30	45,2
$C_2$	52,4	52,240
$C_3$	74,032	39,312

Méthode pour prolonger une  $B_3$  jusqu'au point  $M$  de paramètre  $t < 0$

Exemple avec  $\mathcal{C}_3$  et  $t = -0,2$

$\mathcal{C}_3$

	X	Y
$P_0$	14	10
$P_1$	34	54
$P_2$	64	54
$P_3$	90	26

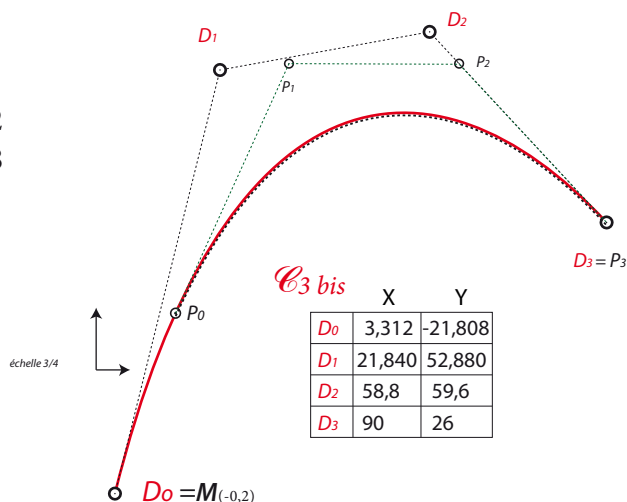
$t$  de  $M = -0,2$  donc  $M(-0,2) \left| \begin{array}{l} 3,312 \\ -21,808 \end{array} \right.$

$$D_0 = M(t)$$

$$D_1 = (1-t)^2P_1 + t(1-t)P_2 + tD_2$$

$$D_2 = t(P_3 - P_2) + P_2$$

$$D_3 = P_3$$



$\mathcal{C}_3$  bis

	X	Y
$D_0$	3,312	-21,808
$D_1$	21,840	52,880
$D_2$	58,8	59,6
$D_3$	90	26

La subdivision De Casteljau permet de fusionner ces 2 courbes simplement .

Exemple 1 : soit 2 courbes  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{B}$  ayant un raccordement de classe  $C^1$  ( $\mathcal{Q}'(A_3) = \mathcal{B}'(B_0)$ ) \*

$\mathcal{Q}$	X	Y
$A_0$	8	18
$A_1$	25	30
$A_2$	40	35
$A_3$	56	35

$$\mathcal{Q} \begin{cases} x = f(t) = 3t^3 - 6t^2 + 51t + 8 \\ y = g(t) = 2t^3 - 21t^2 + 36t + 18 \end{cases}$$

$\mathcal{B}$	X	Y
$B_0$	56	35
$B_1$	72	35
$B_2$	92	30
$B_3$	104	14

$$\mathcal{B} \begin{cases} x = f(t) = -12t^3 + 12t^2 + 48t + 56 \\ y = g(t) = -6t^3 - 15t^2 + 0t + 35 \end{cases}$$

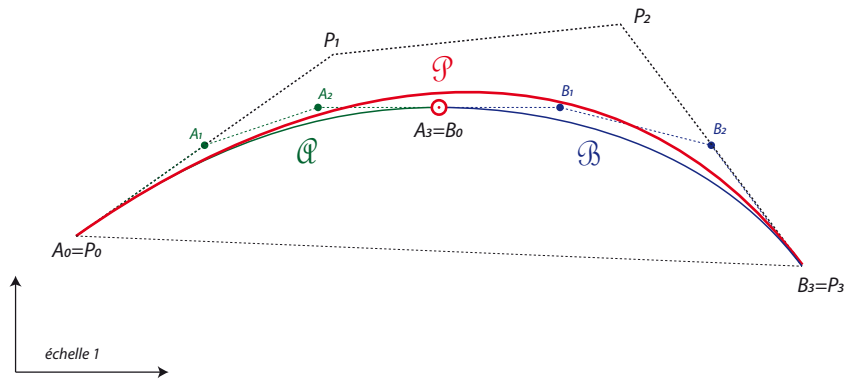
nous pouvons «naïvement» fusionner  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{B}$  avec :  $t_{estimé} = \frac{\|A_2A_3\|}{\|A_2A_3\| + \|B_0B_1\|} = 0,5$

$$A_1 = t(P_1 - A_0) + A_0 \Rightarrow P_1 = \frac{A_1 - A_0(1-t)}{t}$$

$$B_2 = t(B_3 - P_2) + P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{B_2 - tB_3}{(1-t)}$$

$\mathcal{P}$	X	Y
$P_0$	8	18
$P_1$	42	42
$P_2$	80	46
$P_3$	104	14

$$\mathcal{P} \begin{cases} x = f(t) = -18t^3 + 12t^2 + 102t + 8 \\ y = g(t) = -16t^3 - 60t^2 + 72t + 18 \end{cases}$$

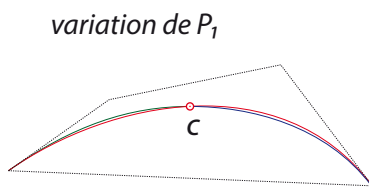


NB : cette méthode respecte les tangentes en  $P_0$  et  $P_3$  mais  $\mathcal{P}$  ne passe pas par  $A_3$  et  $B_3$ .

Nous verrons à la section « courbe passant strictement par 3 points », page 29, qu'il est possible de faire varier  $P_1$  ou  $P_2$ , afin que  $\mathcal{P}_{bis}$  passe par la connexion C tout en conservant les tangentes en  $P_0$  et  $P_3$  (voir ci dessous).

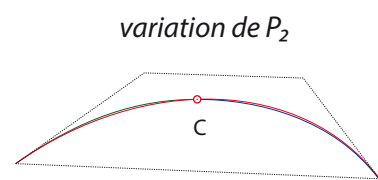
$\mathcal{P}_a$	X	Y
$P_0$	8	18
$P_1$	34,61	36,78
$P_2$	80	46
$P_3$	104	14

$t$  de C  $\approx 0,4907912$



$\mathcal{P}_b$	X	Y
$P_0$	8	18
$P_1$	42	42
$P_2$	84,02	40,64
$P_3$	104	14

$t$  de C  $\approx 0,4496878$



Exemple 2 : idem Exemple 1 mais avec un raccordement de classe  $C^0$  ( $\mathcal{Q}'(A_3) \neq \mathcal{B}'(B_0)$ ) \*

$\mathcal{Q}_1$	X	Y
$A_0$	8	18
$A_1$	25	30
$A_2$	40	40
$A_3$	56	35

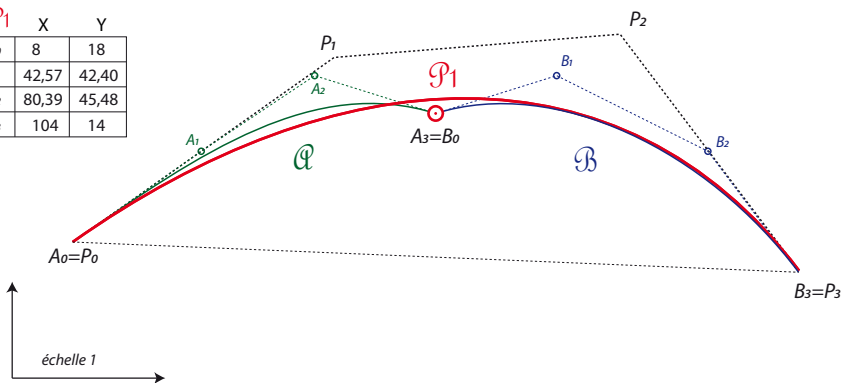
+

$\mathcal{B}_1$	X	Y
$B_0$	56	35
$B_1$	72	40
$B_2$	92	30
$B_3$	104	14

=>

$\mathcal{P}_1$	X	Y
$P_0$	8	18
$P_1$	42,57	42,40
$P_2$	80,39	45,48
$P_3$	104	14

$$t_{estimé} = \frac{\|A_2A_3\|}{\|A_2A_3\| + \|B_0B_1\|} = 0,5$$



\*soit 2 courbes A et B liées en un point C.

$A'$ =dérivée première en C,  $A''$ =dérivée seconde en C  $B'$ =dérivée première en C,  $B''$ =dérivée seconde en C

un raccordement de classe 0 ( $C^0$ ) veut dire que  $A' \neq B'$

un raccordement de classe 1 ( $C^1$ ) veut dire que  $A' = B'$

un raccordement de classe 2 ( $C^2$ ) veut dire que  $A' = B'$  et  $A'' = B''$

### Distance d'un point à une B<sub>3</sub>

Après un lissage, ajustement d'une suite de points  $M$  par une  $B_3$  il est utile d'analyser statistiquement

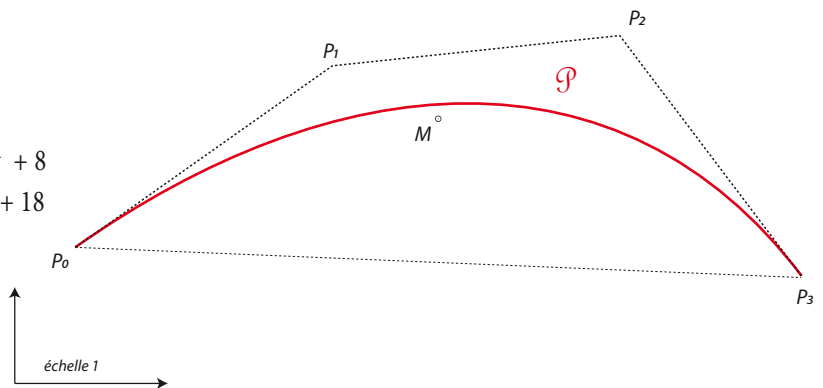
les écarts de ces points avec la  $B_3$  calculée  $\mathcal{P}$  et déterminer l'Ecart Quadratique Moyen du lissage (EQM)\*

Le but est de calculer la plus petite distance de  $M$  par rapport à  $\mathcal{P}$ .

Exemple 3 : avec la courbe  $\mathcal{P}$  et un point  $M$   $\begin{matrix} 56 \\ 35 \end{matrix}$

$\mathcal{P}$	X	Y
$P_0$	8	18
$P_1$	42	42
$P_2$	80	46
$P_3$	104	14

$$\mathcal{P} \begin{cases} x = f(t) = -18t^3 + 12t^2 + 102t + 8 \\ y = g(t) = -16t^3 - 60t^2 + 72t + 18 \end{cases}$$

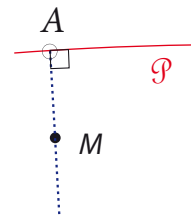


Il faut donc définir le point  $A \in \mathcal{P}$  (le vecteur normal en  $A$  doit passer par  $M$ )

Déterminons les équations pour résoudre le problème.

Le coefficient directeur du vecteur normal en  $A(t)$  est :  $-\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{y_M - y_{A(t)}}{x_M - x_{A(t)}}$

Nous pouvons donc poser :  $-\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{y_M - g(t)}{x_M - f(t)} \Rightarrow f'(t)(f(t) - x_M) + g'(t)(g(t) - y_M) = 0$



En utilisant la définition canonique d'une B<sub>3</sub>

$$\Rightarrow (3x_3t^2 + 2x_2t + x_1)(x_3t^3 + x_2t^2 + x_1t + x_0 - x_M) + (3y_3t^2 + 2y_2t + y_1)(y_3t^3 + y_2t^2 + y_1t + y_0 - y_M) = 0$$

Après développement

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(t) = & 3(x_3^2 + y_3^2)t^5 + 5(x_3x_2 + y_3y_2)t^4 + [2(x_2^2 + y_2^2) + 4(x_3x_1 + y_3y_1)]t^3 \\ & + [3(x_2x_1 + y_2y_1 + x_3(y_0 - y_M) + y_3(x_0 - x_M))]t^2 \\ & + [x_1^2 + y_1^2 + 2x_2(x_0 - x_M) + 2y_2(y_0 - y_M)]t + x_1(x_0 - x_M) + y_1(y_0 - y_M) \end{aligned}$$

selon l'exemple  $\Rightarrow$   $h(t) = 1740t^5 + 3720t^4 - 4464t^3 - 5880t^2 + 16476t - 6120$   
 $h'(t) = 8700t^4 + 14880t^3 - 13392t^2 - 11760t + 16476$

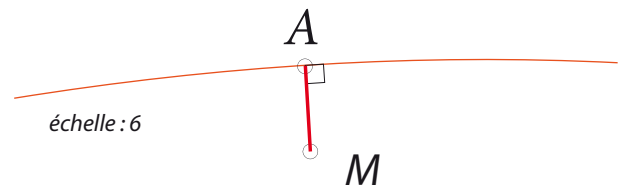
Et en résolvant  $h(t)=0$  par la méthode de Raphson Newton<sup>[5]</sup>  $\Rightarrow t_{(A)} \approx 0,4617252$   $A \approx \begin{matrix} 55,882 \\ 36,878 \end{matrix}$

donc  $\|\overline{MA}\| \approx 1,882 = \text{écart}$

NB : la dichotomie peut ou doit commencer avec un  $t$  estimé.

Soit dans ce cas  $\Rightarrow t_{\text{estimé}} = \frac{\|\overline{P_0M}\|}{\|\overline{P_0P_3}\|} = 0,52997$

Dans notre exemple il existe une seule solution sur l'intervalle [0 1]



$$*\text{EQM} = \frac{\sum_1^n (\text{écart}_{(n)}^2)}{n} = \text{MSE}$$

## Rayon de courbure (cercle osculateur)

exemple avec :

$\mathcal{C}_3$	X	Y
$P_0$	14	10
$P_1$	34	54
$P_2$	64	54
$P_3$	90	26

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) = -14t^3 + 30t^2 + 60t + 14 \\ y = g(t) = 16t^3 - 132t^2 + 132t + 10 \end{cases}$$

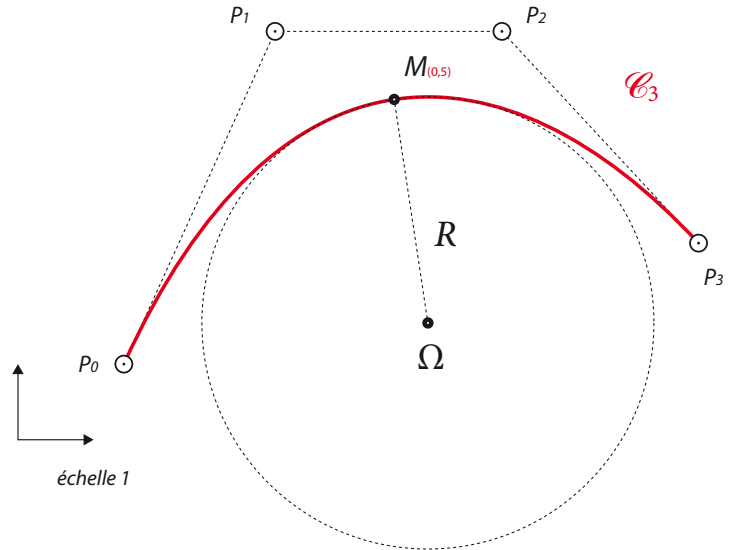
### Calcul du rayon de courbure $R$ relatif à un point $M(t)$ \*

$$R \text{ en } M(t) = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}$$

$$\text{avec } M'_{(0,5)} \begin{cases} x' = f'_{(0,5)} = 79,5 \\ y' = g'_{(0,5)} = 12 \end{cases}$$

$$\text{et } M''_{(0,5)} \begin{cases} x'' = f''_{(0,5)} = 18 \\ y'' = g''_{(0,5)} = -216 \end{cases}$$

$$R \text{ en } M_{(0,5)} = \frac{519729,318}{-17388} \approx -29,890$$



NB : si au point  $M(t)$   $x'y'' - y'x'' < 0$  la courbe est concave en ce point, sinon elle est convexe [4]

⚠ si le paramètre  $t$  correspond à un point d'inflexion ou de rebroussement le rayon  $R$  sera indéfini car  $x'y'' - y'x'' = 0$

### Calcul du centre de courbure $\Omega$

Dans le système de coordonnées de Serret - Frenet \* en  $M_{(0,5)} \begin{cases} 49,75 \\ 45 \end{cases}$

$$\text{nous avons } \vec{N} \begin{cases} \frac{(-y')}{(x'^2 + y'^2)^{0,5}} = \frac{-12}{80,4} \approx -0,1493 \\ \frac{(x')}{(x'^2 + y'^2)^{0,5}} = \frac{79,5}{80,4} \approx 0,9887 \end{cases}$$

$$\Omega_{(t)} \begin{cases} (xN)(R) + xM_{(t)} \\ (yN)(R) + yM_{(t)} \end{cases} \quad \Omega_{(0,5)} \begin{cases} \frac{(-y')(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{(x'y'' - y'x'')(x'^2 + y'^2)^{1/2}} + xM_{(0,5)} \approx 54,211 \\ \frac{(x')(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{(x'y'' - y'x'')(x'^2 + y'^2)^{1/2}} + yM_{(0,5)} \approx 15,445 \end{cases}$$

$$\text{Donc } x \Omega_{(t)} = \frac{(-y')(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} + xM_{(t)} \quad y \Omega_{(t)} = \frac{(x')(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} + yM_{(t)}$$

\* [http://prof.math.free.fr/textes/cours/normal/courbure\\_html/index.html](http://prof.math.free.fr/textes/cours/normal/courbure_html/index.html)

# Paramétrisation d'une fonction du troisième degré sur un intervalle borné.

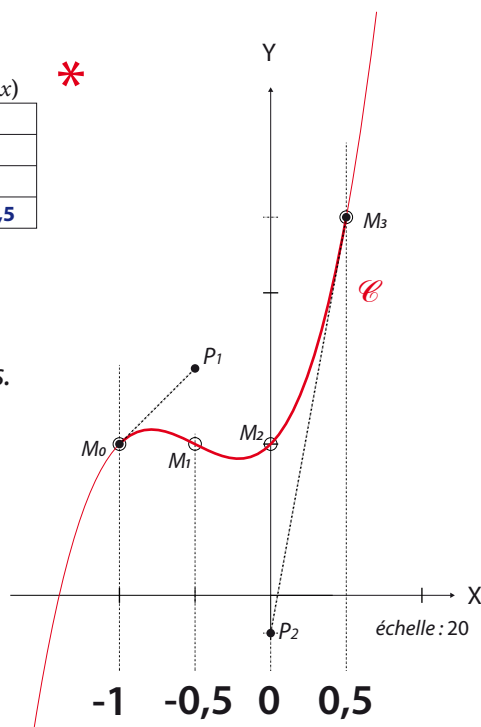
Soit la fonction :  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1x + 1$  que l'on veut paramétriser sur l'intervalle  $[-1, 0,5]$

a) pour commencer choisir 4 points de la courbe  $\mathcal{C}$

$M_0$  est au début de l'intervalle  
 $M_1, M_2$  2 points intermédiaires  
 $M_3$  est la fin de l'intervalle

$\Rightarrow \vec{OM}(t)$

	x	f(x)
$M_0$	-1	1
$M_1$	-0,5	1
$M_2$	0	1
$M_3$	0,5	2,5



b) Calculer les paramètres  $t$  en  $M_0, M_1, M_2, M_3$

Dans ce cas là le calcul est simple car  $t$  est proportionnel aux abscisses.

$t$  en  $M_0 = 0$  ,  $t$  en  $M_3 = 1$

$$t \text{ en } M_1 = \frac{xM_1 - xM_0}{xM_3 - xM_0} = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}$$

$$t \text{ en } M_2 = \frac{xM_2 - xM_0}{xM_3 - xM_0} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$$

enfin avec :

$$\begin{matrix} t & 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0,33 & 0,11 & 0,037 \\ 2/3 & 1 & 0,67 & 0,44 & 0,296 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{matrice de passage} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \begin{bmatrix} xP_0 & yP_0 \\ xP_1 & yP_1 \\ xP_2 & yP_2 \\ xP_3 & yP_3 \end{bmatrix} \\ \vec{OP} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} xM(t) & yM(t) \\ -1 & 1 \\ -0,5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0,5 & 2,5 \end{bmatrix} \\ \vec{OM}(t) \end{matrix} *$$

$$\vec{OP} = [\mathcal{I}_n \times \mathcal{M}_3]^{-1} \times \vec{OM}(t) = \begin{matrix} \mathcal{C} & X & Y \\ P_0 & -1 & 1 \\ P_1 & -0,5 & 1,5 \\ P_2 & 0 & -0,25 \\ P_3 & 0,5 & 2,5 \end{matrix} \quad \mathcal{C} \text{ est une } B_3 \text{ de type 1.}$$

\* La **réciproque** est possible par une interpolation polynomiale de type : Hermite, Lagrange, Newton, Vandermonde...

Exemple avec la matrice de **Vandermonde** :

$$\begin{matrix} \mathcal{C} = \text{les coefficients du polynôme} \\ \mathcal{F} = \text{les images } f(x_n) \text{ du polynôme} \\ n = \text{le nombre de points} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \\ \mathcal{V} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\ \mathcal{C} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \\ \mathcal{F} \end{matrix}$$

Avec  $n = 4$

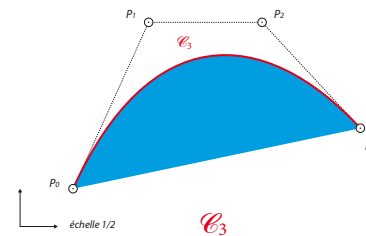
$$\begin{matrix} \begin{matrix} x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -0,5 & 0,25 & -0,125 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,25 & 0,125 \end{pmatrix} \\ \mathcal{V} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ \mathcal{C} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2,5 \end{pmatrix} \\ \mathcal{F} \end{matrix} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{V}^{-1} \times \mathcal{F} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \mathcal{C} \end{matrix}$$

### Aire d'une B<sub>3</sub>

a) Aire d'une B<sub>3</sub> fermée (méthode WEB).

En posant exceptionnellement:  $X_0 = xP_0, Y_0 = yP_0$ ;  $X_1 = xP_1, Y_1 = yP_1$  etc...

$$\text{formule de l'aire} = \frac{3}{20} [ (Y_1 - Y_0)(X_2 + X_3 - 2X_0) - (X_1 - X_0)(Y_2 + Y_3 - 2Y_0) - 2 [ X_0(Y_2 - Y_3) + Y_0(X_3 - X_2) + Y_3X_2 - Y_2X_3 ] ]$$



P <sub>0</sub>	14	10
P <sub>1</sub>	34	54
P <sub>2</sub>	64	54
P <sub>3</sub>	90	26

Dans cet exemple, aire de C<sub>3</sub> = 1414,8 mm<sup>2</sup>

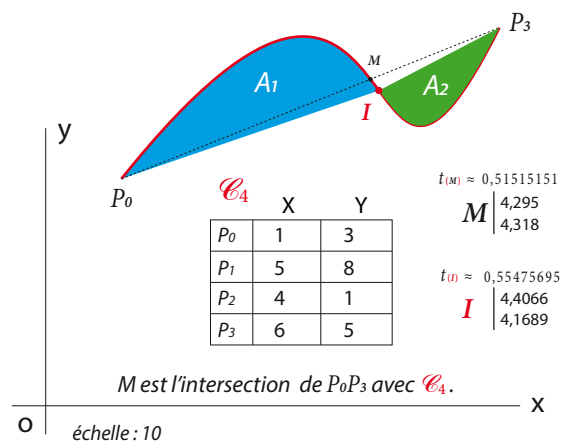
b) Aire d'une B<sub>3</sub> fermée acceptant un point d'inflexion sur ]0 1[

L'aire de C<sub>4</sub> = 1,2 mm<sup>2</sup> ?? **Non !! le résultat est faux**

car le point M ne coïncide pas avec le point d'inflexion I.

Donc la formule ne s'applique que pour des B<sub>3</sub> continues sur ]0 1[ sans points stationnaires ou de croisement sur ]0 1[.

Généralement, si 1 ou 2 points stationnaires sont sur ]0 1[ il faut subdiviser la courbe en 2 ou 3 parties. Puis additionner les aires correspondantes.



Dans notre exemple Il est nécessaire de scinder la courbe en 2 parties: A<sub>1</sub> et A<sub>2</sub>

Donc l'aire vraie de C<sub>4</sub> = 2,4958 - 0,8116 = 1,6842 mm<sup>2</sup>

A <sub>1</sub> aire ≈ 2,4958			A <sub>2</sub> aire ≈ -0,8116		
P <sub>0</sub>	1	3	P <sub>0</sub>	4,4066	4,1689
P <sub>1</sub>	3,2190	5,7738	P <sub>1</sub>	4,8138	3,6187
P <sub>2</sub>	3,8993	4,8545	P <sub>2</sub>	5,1095	3,2190
P <sub>3</sub>	4,4066	4,1689	P <sub>3</sub>	6	5

NB: constatons que si une courbe est concave son aire est positive, sinon elle est convexe et négative

c) Aire d'une B<sub>3</sub> sur un intervalle [a b].

NB: a est le paramètre t du début de l'intervalle et b celui de la fin.

En utilisant la formule: aire =  $\int_a^b (g(t)f'(t))$  et la définition canonique d'une B<sub>3</sub>  $M(t) \begin{cases} x = f(t) = x_3t^3 + x_2t^2 + x_1t + x_0 \\ y = g(t) = y_3t^3 + y_2t^2 + y_1t + y_0 \end{cases}$

$$g(t)f'(t) = h(t) = 3x_3y_3t^5 + (3x_3y_2 + 2x_2y_3)t^4 + (3x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_3)t^3 + (3x_3y_0 + 2x_2y_1 + x_1y_2)t^2 + (2x_2y_0 + x_1y_1)t + x_3y_0$$

$$H(t) = \frac{3x_3y_3t^6}{6} + \frac{(3x_3y_2 + 2x_2y_3)t^5}{5} + \frac{(3x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_3)t^4}{4} + \frac{(3x_3y_0 + 2x_2y_1 + x_1y_2)t^3}{3} + \frac{(2x_2y_0 + x_1y_1)t^2}{2} + \frac{x_3y_0t}{1} + C$$

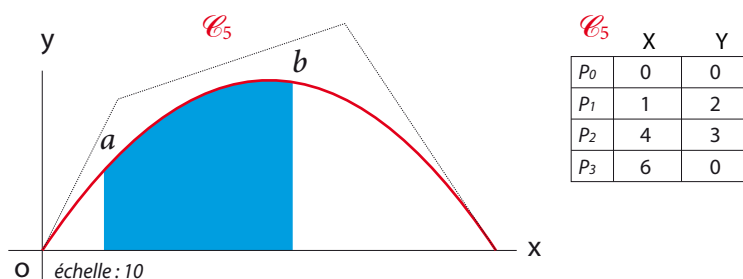
Dans cet exemple:

$$f(t) = -3t^3 + 6t^2 + 3t + 0 \quad f'(t) = -9t^2 + 12t + 3$$

$$g(t) = -3t^3 - 3t^2 + 6t + 0$$

$$h(t) = 27t^5 - 9t^4 - 99t^3 + 63t^2 + 18t + 0$$

$$H(t) = 4,5t^6 - 1,8t^5 - 24,75t^4 + 21t^3 + 9t^2 + C$$



L'aire de C<sub>5</sub> sur l'intervalle [0,2 0,6] = H(0,6) - H(0,2) ≈ 4,15027 mm<sup>2</sup>

NB: POP3 doit être sur l'axe OX  
L'intervalle [a b] doit être continu

## Abscisse curviligne $S$ (longueur) d'une $B_3$

La théorie veut que la longueur d'une courbe paramétrique =  $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

Pour une  $B_3$   $S = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} = \int_a^b \sqrt{(3x_3t^2 + 2x_2t + x_1)^2 + (3y_3t^2 + 2y_2t + y_1)^2}$

NB : les variables  $a$  et  $b$  sont les valeurs des paramètres  $t$

Mais dans la pratique nous ne pouvons pas développer cette intégrale .

Par contre, via une **approximation**, il est possible d'estimer convenablement cette longueur.

Pour ma part je divise la courbe en 100 parties sur l'intervalle  $[a \ b]$  avec un pas de  $(b-a) / 100$ .

Je calcule les coordonnées des points  $M$  correspondants allant de  $M_0$  à  $M_{100}$ .

Je détermine le centre du cercle passant par  $M_0 M_1 M_2$

Je peut donc calculer son rayon, son angle au centre  $\theta$  et enfin la longueur de l'arc .

Ainsi de suite avec  $M_2 M_3 M_4$ ,  $M_4 M_5 M_6$ , etc... jusque  $M_{98} M_{99} M_{100}$  je peut estimer  $S$

Exemple avec  $\mathcal{C}_3$  sur l'intervalle  $[0,2 \ 0,6]$   $\Rightarrow$  pas =  $(0,6 - 0,2) / 100 = 0,004$

Donc  $S$  de  $\mathcal{C}_3$  sur  $[0,2 \ 0,6]$   $\approx$  2,705 mm

t	n	xM	yM	xC	yC	corde	rayon	$\theta$	Lg, arc
<b>0,200</b>	0	0,8160	1,0560	3,15	-1,60	0,05	3,53	0,015 rad	0,05
0,204	1	0,8362	1,0737						
0,208	2	0,8566	1,0912						
0,212	3	0,8771	1,1086						
0,216	4	0,8977	1,1258	3,15	-1,59	0,05	3,53	0,015 rad	0,05
⋮	⋮	⋮	⋮						
⋮	⋮	⋮	⋮						
⋮	⋮	⋮	⋮						
0,584	96	3,2008	1,8833	2,96	-1,07	0,06	2,97	0,019 rad	0,06
0,588	97	3,2286	1,8809						
0,592	98	3,2564	1,8782						
0,596	99	3,2842	1,8752						
<b>0,600</b>	100	3,3120	1,8720	2,96	-1,08	0,06	2,97	0,019 rad	0,06

Exemple d'une paramétrique pour vérifier la précision de la méthode ci-dessus

Find the length of the arc in one period of the cycloid  $x = r - r \sin t, y = r(1 - \cos t)$ . The values of  $t$  run from 0 to  $2\pi$ .

Arc length =  $\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + 1} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt \quad \text{using the identity } \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{2}$$

$$= \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt \quad \text{since } \sin \frac{t}{2} \geq 0 \text{ when } 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$= -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi}$$

$$= (-4 \cos \pi) - (-4 \cos 0)$$

$$= 4 + 4 \quad \text{longueur vraie} = 8$$

avec l'approximation:  $S \approx 8,0000007976$

# Simulation d'un arc de cercle par une B3

	X	Y
M1	1	1,5
M2	4	6
M3	8	7
A	2,5	3,75
B	6	6,5

NB : pour avoir une bonne précision l'angle au centre  $\theta$  de l'arc doit être  $\leq 90^\circ$

1) Calculs pour définir le cercle passant par  $M_1 M_2 M_3$ .

Le centre  $\Omega$  de ce cercle est déterminé par  
l'intersection des médiatrices de :  $\overline{M_1M_2}$  et  $\overline{M_2M_3}$

définition des coordonnées de A et B

$$x_A = \frac{(x_{M_1} + x_{M_2})}{2} \quad y_A = \frac{(y_{M_1} + y_{M_2})}{2} \quad \dots \text{similairement pour B}$$

calculs des coefficients directeurs de :  $\alpha, \beta$

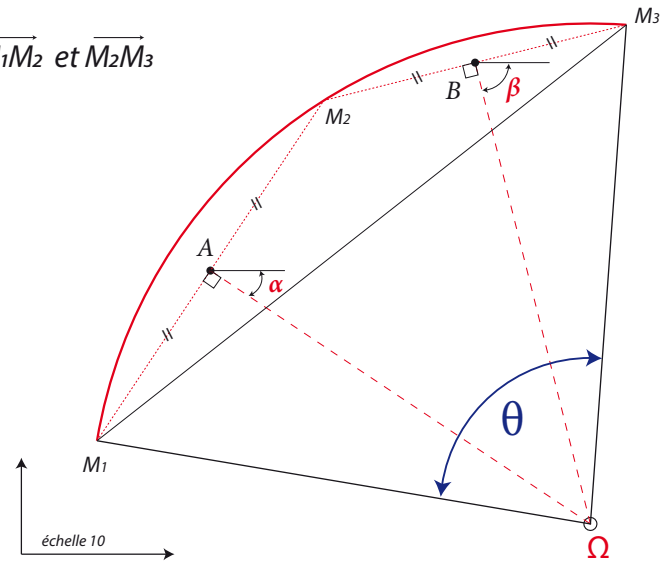
$$\tan(\alpha) = -\frac{(x_{M_2} - x_{M_1})}{(y_{M_2} - y_{M_1})} \quad \tan(\beta) = -\frac{(x_{M_3} - x_{M_2})}{(y_{M_3} - y_{M_2})}$$

donc avec la méthode de Delambre (voir page 37)

l'intersection  $\Rightarrow x_\Omega = 7,525 \quad y_\Omega = 0,4$



si  $y_{(M_1)} = y_{(M_2)}$  alors  $x_\Omega = x_A$  ,  $y_\Omega = \tan(\beta) (x_A - x_B) + y_B$   
 si  $y_{(M_2)} = y_{(M_3)}$  alors  $x_\Omega = x_B$  ,  $y_\Omega = \tan(\alpha) (x_B - x_A) + y_A$   
 si  $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$  alors les points M sont colinéaires



$$\Rightarrow \text{rayon } R = \|\overrightarrow{M_1\Omega}\| \approx 6,617 \quad \text{corde } C = \|\overrightarrow{M_1M_3}\| \approx 8,902 \quad \Rightarrow \theta = 2 \arcsin\left(\frac{C}{2R}\right) \approx 84,542^\circ$$

2) Calculs pour définir T

$$T = M_1 \tan(\alpha_0) \cap M_3 \tan(\alpha_3) \quad \text{avec } \tan(\alpha_0) = -\frac{(x_\Omega - x_{M_1})}{(y_\Omega - y_{M_1})} \quad \tan(\alpha_3) = -\frac{(x_\Omega - x_{M_3})}{(y_\Omega - y_{M_3})} \Rightarrow T \begin{cases} 2 \\ 7,432 \end{cases}$$

3) Calculs pour définir les **angles orientés\*** suivants :

$$\alpha_0 = \text{Arctan}\left(\frac{y^T - y_{M_1}}{x^T - x_{M_1}}\right) \approx 80,431^\circ \quad \alpha_3 = \text{Arctan}\left(\frac{y^T - y_{M_3}}{x^T - x_{M_3}}\right) + 180^\circ \approx -4,116 + 180 \approx 175,884^\circ$$

4) Calculs pour définir la B3

Astuce : ne connaissant pas le paramètre t de  $M_2$  il faut définir le point  $M_2'$

qui doit être sur la bissectrice de  $\widehat{M_1\Omega M_3}$  , ainsi t de  $M_2' = 0,5$

$$\Rightarrow x_{M_2'} = \Delta x_{(\Omega T)} \left(\frac{R}{\|\Omega T\|}\right) + x_\Omega \approx 3,437 \quad y_{M_2'} = \Delta y_{(\Omega T)} \left(\frac{R}{\|\Omega T\|}\right) + y_\Omega \approx 5,603 \quad \begin{cases} \Delta x_{(\Omega T)} = x^T - x_\Omega \\ \Delta y_{(\Omega T)} = y^T - y_\Omega \end{cases}$$

avec

Pts	X	Y
M1	1	1,5
M2'	3,437	5,603
M3	8	7
T	2	7,432

Polynôme de Bernstein avec  $t=0,5$

B0	B1	B2	B3
$(1-t)^3$	$3t(1-t)^2$	$3t^2(1-t)$	$t^3$
0,125	0,375	0,375	0,125

résoudre  $\begin{cases} x_{M_2'} = B_0 x_{P_0} + B_1 (\varphi_0 \cos(\alpha_0) + x_{P_0}) + B_2 (\varphi_3 \cos(\alpha_3) + x_{P_3}) + B_3 x_{P_3} \\ \varphi = \varphi_0 = \varphi_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_0 = \varphi_3 = \frac{x_{M_2'} - 0,5 (x_{P_0} + x_{P_3})}{0,375 [\cos(\alpha_0) + \cos(\alpha_3)]} \approx 3,410940045$$

Enfin

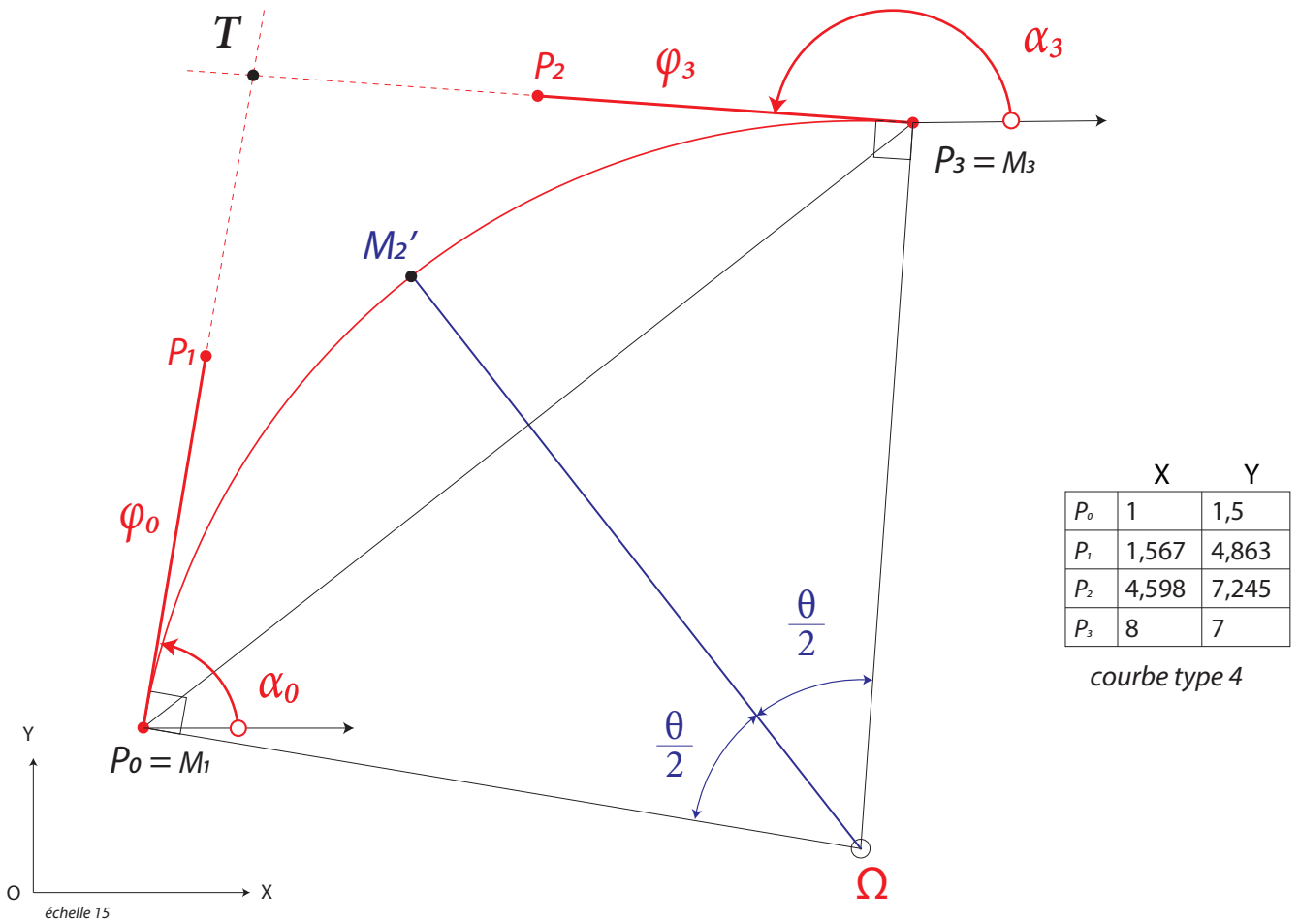
$$x_{P_1} = x_{M_1} + \varphi_0 \cos(\alpha_0) \approx 1,567 \quad x_{P_2} = x_{M_3} + \varphi_3 \cos(\alpha_3) \approx 4,598$$

$$y_{P_1} = y_{M_1} + \varphi_0 \sin(\alpha_0) \approx 4,863 \quad y_{P_2} = y_{M_3} + \varphi_3 \sin(\alpha_3) \approx 7,245$$

	X	Y
P0	1	1,5
P1	1,567	4,863
P2	4,598	7,245
P3	8	7

\* pour en savoir plus sur les angles orientés et coordonnées polaires voir pages 38 , 39





Voici 3 autres méthodes de calcul de  $\varphi$

a) Mr. D. Krauss avec:  $S = \sin(\theta), C = \cos(\theta), K_0 = \frac{1}{3} [-S + \sqrt{S^2 + 6(1-C)}], K_1 = \frac{4}{3} \tan(\frac{\theta}{4})$   
 $\alpha = 6(3K_0 + S), \beta = 9(1-C)K_1 + 12S, x = -0,118433799202707, K_{idéal} = \frac{\beta K_1 - \alpha x K_0}{\beta - \alpha x}$   
 $\varphi = K_{idéal} \times Rayon \approx 3,652064764$

b) Mr. Thomas W. Sederberg  $\varphi = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{1 + 2 \cos \frac{\theta}{2}} \times Rayon \approx 3,876190288$   
 c) [https://pomax.github.io/bezierinfo/#circles\\_cubic](https://pomax.github.io/bezierinfo/#circles_cubic)  $\varphi = \frac{4}{3} \tan(\frac{\theta}{4}) \times Rayon \approx 3,410940045$

Tableau comparatif

	Rayon = 10 $\theta = 90^\circ$			
$t$	$\Delta R$ perso	$\Delta R$ Krauss	$\Delta R$ Sederberg	$\Delta R$ Pomax
0,1	0,0015	0,0013	0,0240	0,0015
0,2	0,0027	0,0019	0,0745	0,0027
0,3	0,0021	0,0007	0,1267	0,0021
0,4	0,0007	-0,0011	0,1642	0,0007
0,5	0,0000	-0,0020	0,1777	0,0000
$\varphi$	5,52284749831575	5,51915630759849	5,85786437628077	5,52284749830793

EMQ                      0,0000029                      0,0000022                      0,0161408                      0,0000029

## La clothoïde [2]

### Avant propos.

La particularité d'une clothoïde, appelée aussi spirale de «Cornu», est que son rayon de courbure est progressif.

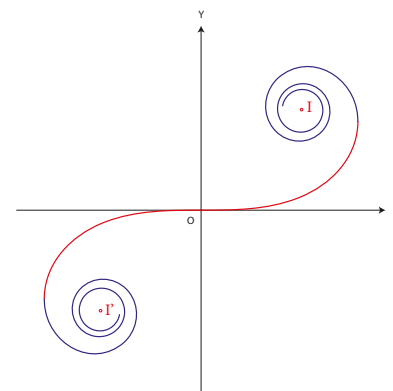
Au fur et à mesure l'on avance sur la courbe ce rayon diminue.

Dans le domaine des travaux public, le début de la clothoïde est utilisé pour raccorder des axes routiers.

La spirale permet d'aborder progressivement une partie circulaire sans changement brusque de direction.

En France, la législation impose un rayon de virage circulaire pour chaque catégorie de routes.

Par exemple pour une autoroute de catégorie L120, où la vitesse est limitée à 130 Km/h, le rayon du virage circulaire doit être  $\geq$  à 665m.



### Quelques définitions mathématiques .

coordonnées de **I**:  $x = y = \frac{A\sqrt{\pi}}{2}$

**A** est appelé paramètre de la clothoïde

Soit : **S** l'abscisse curviligne de la clothoïde

**r** son rayon de courbure

**τ** l'angle en radian d'une tangente de la courbe

L'équation intrinsèque de la spirale est :  $S r = A^2$

$$\tau = \frac{s^2}{2A^2} = \frac{s}{2r}$$

Les coordonnées d'un point de la courbe sont :

$$x = \int \cos\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds \quad y = \int \sin\left(\frac{s^2}{2A^2}\right) ds$$

Ces intégrales dites de Fresnel ne peuvent pas s'exprimer à partir de fonctions élémentaires, mais un calcul à l'aide d'un développement limité au voisinage de O est possible :

$$xM(s) = s - \frac{s^5}{40A^4} + \frac{s^9}{3456A^8} - \frac{s^{13}}{599040A^{12}} + \dots$$

$$yM(s) = \frac{s^3}{6A^2} - \frac{s^7}{336A^6} + \frac{s^{11}}{42240A^{10}} - \frac{s^{15}}{9676800A^{14}} + \dots$$

dans l'exemple 1 avec **S** = 35 et **A** = 40

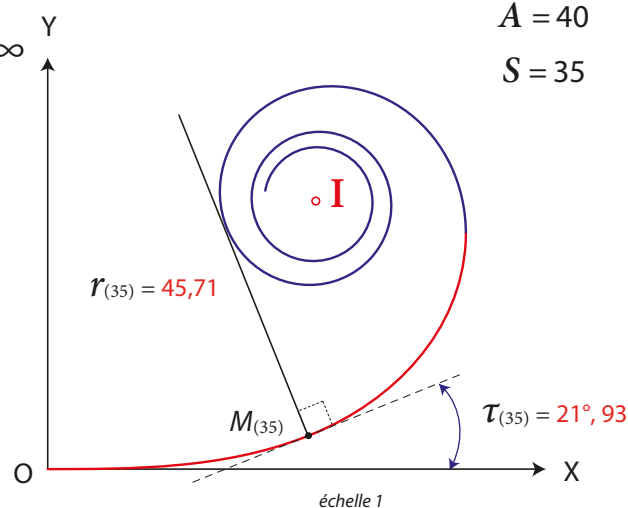
$$xM_{(35)} = 34,49$$

$$yM_{(35)} = 4,42$$

### Exemple 1)

$$A = 40$$

$$S = 35$$



## Simulation d'un arc de clothoïde par une $B_3$

### Exemple 2)

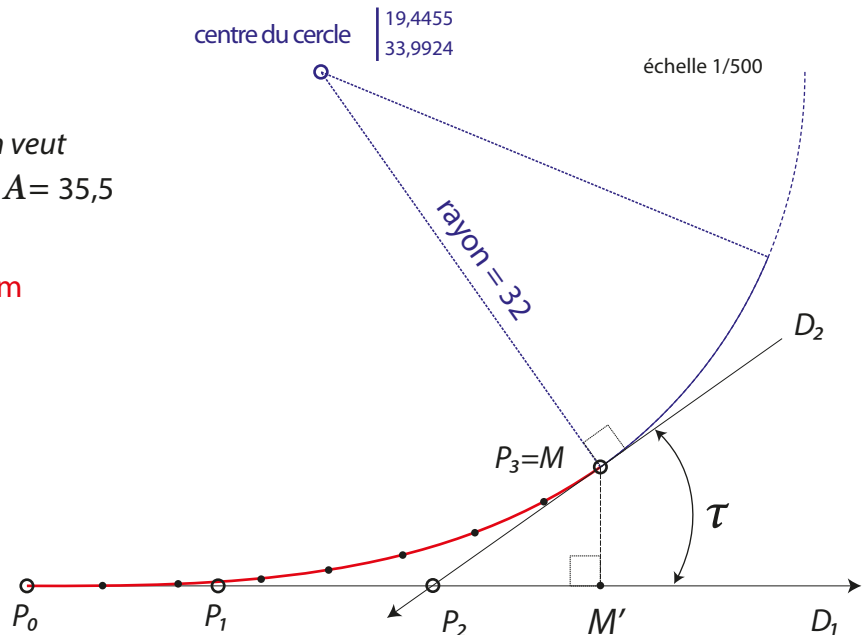
Soit un arc de cercle de rayon 32 m que l'on veut raccorder par une clothoïde de paramètre  $A = 35,5$

$$s r = A^2 \text{ donc } S_{(32)} = 35,5^2/32 \approx 39,383 \text{ m}$$

$$\tau_{(39,383)} = \frac{39,383}{2 \cdot 32} \approx 35,257^\circ$$

$$xM_{(39,383)} \approx 37,9174$$

$$yM_{(39,383)} \approx 7,8623$$



### Définition de la courbe de Bézier

Soit : les droites  $D_1$ ,  $D_2$  et  $M'$  qui est le projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $D_1$

$P_0$  est à l'origine de la clothoïde

$P_1$  est à  $1/3$  de  $\overline{P_0M'}$

$P_2$  est l'intersection de  $D_1$  et  $D_2$

$P_3$  est le point  $M$

donc la courbe de Bézier  $\approx$

	X	Y
$P_0$	0	0
$P_1$	12,639	0
$P_2$	26,796	0
$P_3$	37,917	7,862

### Tableaux comparatifs

Calcul traditionnel		abscisse curviligne tous les 5 m		
param. A	35,5	rayon de l'arc de cercle à raccorder 32 m		
s	X	Y	$\tau$	r
0,00	0,000	0,000	0,000°	infinis
5,00	5,000	0,017	0,568°	252,05
10,00	9,998	0,132	2,273°	126,03
15,00	14,988	0,446	5,115°	84,02
20,00	19,950	1,056	9,093°	63,01
25,00	24,847	2,057	14,207°	50,41
30,00	29,620	3,538	20,459°	42,01
35,00	34,182	5,575	27,847°	36,01
<b>39,383</b>	<b>37,917</b>	<b>7,862</b>	<b>35,257°</b>	<b>32,00</b>

approximation par la courbe de bézier				A moyen 35,6	
X	Y	écart des Y	r estimé	S estimé	A estimé
0,000	<b>0,000</b>	<b>0,000</b>	infinis		
5,000	<b>0,017</b>	<b>-0,001</b>	248,5	5,00	35,3
9,998	<b>0,135</b>	<b>-0,002</b>	128,6	10,00	35,9
14,988	<b>0,446</b>	<b>0,000</b>	86,0	15,00	35,9
19,950	<b>1,048</b>	<b>0,008</b>	63,5	20,00	35,6
24,847	<b>2,038</b>	<b>0,019</b>	49,7	25,00	35,2
29,620	<b>3,515</b>	<b>0,023</b>	40,9	30,00	35,0
34,182	<b>5,563</b>	<b>0,012</b>	35,9	35,00	35,4
<b>37,917</b>	<b>7,862</b>	<b>0,000</b>	<b>34,1</b>	<b>39,389</b>	36,6

Nous pouvons constater que avec un angle  $\tau \approx 35^\circ$  la précision se dégrade vers la fin de la courbe.

Si  $\tau \approx 20^\circ$  l'écart maxi est de 0,014 et avec  $\tau \approx 40^\circ$  l'écart maxi est de 0,040.

Donc la précision diminue si  $\tau$  augmente.

L'utilité de cette approximation est que la courbe de Bézier peut être calculée sur  $\mathbb{R}^2$ .

Elle permet, par exemple, de visualiser un avant projet à petite échelle.

De vérifier le paramètre A.

Mais ATTENTION : la méthode traditionnelle fait Foi et Loi.

## B2 passant strictement par 3 points

1) Les tangentes en  $A_0$  et  $A_2$  sont libres.

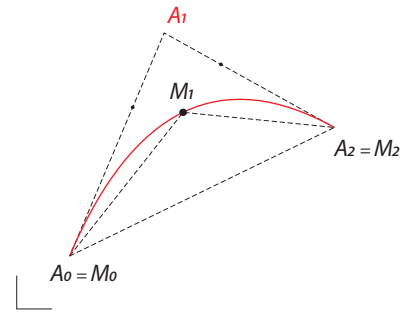
Dans ce cas il existe une infinités de solutions car tout dépend de l'estimation du paramètre  $t$  de  $M_1$ .

soit	X	Y
$A_0 = M_0$	7	7
$M_1$	22	26
$A_2 = M_2$	42	24

$t$  estimé de  $M_1 = 0,5$

$$x_{A_1} = (x_{M_1} - (1-t)^2 x_{A_0} - t^2 x_{A_2}) / 2t(1-t) = 19,5$$

$$y_{A_1} = (y_{M_1} - (1-t)^2 y_{A_0} - t^2 y_{A_2}) / 2t(1-t) = 36,5$$



2) La tangente en  $A_0$  est imposée .

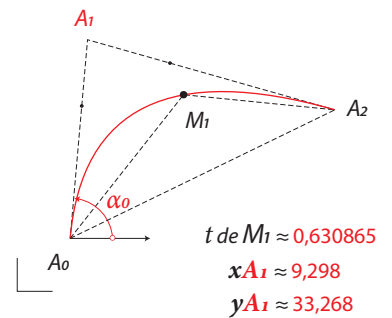
Dans ce cas il faut calculer le paramètre  $t$  de  $M_1$

avec les mêmes points de 1) et  $\alpha_0 = 85^\circ$

$$\vec{\alpha}_0 = \tan(\alpha_0)$$

$$\text{résoudre} \begin{cases} x_{M_1} = t^2 (x_{A_0} + x_{A_2} - 2x_{A_1}) + 2t (x_{A_1} - x_{A_0}) + x_{A_0} \\ y_{M_1} = t^2 (y_{A_0} + y_{A_2} - 2y_{A_1}) + 2t (y_{A_1} - y_{A_0}) + y_{A_0} \\ \tan(\alpha_0) = \vec{\alpha}_0 = \frac{y_{A_1} - y_{A_0}}{x_{A_1} - x_{A_0}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t^2 [ \vec{\alpha}_0(x_{A_0} - x_{A_2}) + y_{A_2} - y_{A_0} ] + \vec{\alpha}_0(x_{M_1} - x_{A_0}) + y_{A_0} - y_{M_1} = 0$$



$t$  de  $M_1 \approx 0,630865$

$$x_{A_1} \approx 9,298$$

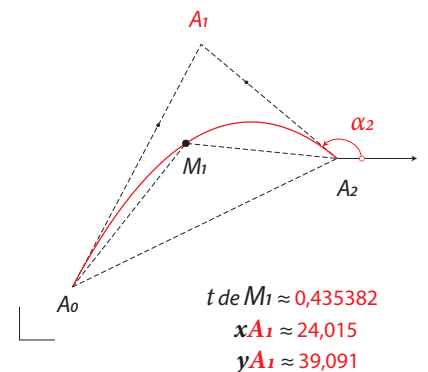
$$y_{A_1} \approx 33,268$$

3) La tangente en  $A_2$  est imposée .

Calcul de  $t$  de  $M_1$  avec les mêmes points de 1) et  $\alpha_2 = 140^\circ$  ou  $-40^\circ$

$$\text{résoudre} \begin{cases} x_{M_1} = t^2 (x_{A_0} + x_{A_2} - 2x_{A_1}) + 2t (x_{A_1} - x_{A_0}) + x_{A_0} \\ y_{M_1} = t^2 (y_{A_0} + y_{A_2} - 2y_{A_1}) + 2t (y_{A_1} - y_{A_0}) + y_{A_0} \\ \vec{\alpha}_2 = \frac{y_{A_1} - y_{A_2}}{x_{A_1} - x_{A_2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t^2 [ \vec{\alpha}_2(x_{A_2} - x_{A_0}) + y_{A_0} - y_{A_2} ] + 2t [ \vec{\alpha}_2(x_{A_0} - x_{A_2}) + y_{A_2} - y_{A_0} ] + \vec{\alpha}_2(x_{M_1} - x_{A_0}) - y_{M_1} + y_{A_0} = 0$$



$t$  de  $M_1 \approx 0,435382$

$$x_{A_1} \approx 24,015$$

$$y_{A_1} \approx 39,091$$

4)  $M_1$  est le sommet de la parabole .

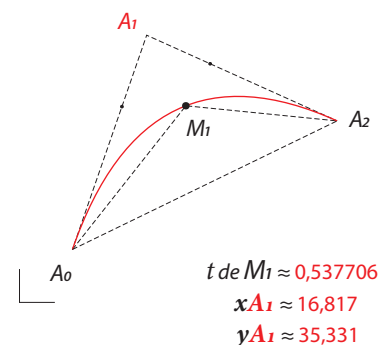
Avec les mêmes points de 1)

et à l'aide des équations des dérivées première et seconde :

$$\text{résoudre} \begin{cases} x_{M_1} = t^2 (x_{A_0} + x_{A_2} - 2x_{A_1}) + 2t (x_{A_1} - x_{A_0}) + x_{A_0} \\ y_{M_1} = t^2 (y_{A_0} + y_{A_2} - 2y_{A_1}) + 2t (y_{A_1} - y_{A_0}) + y_{A_0} \\ \frac{g'(t)}{f'(t)} = - \frac{f''(t)}{g''(t)} \end{cases}$$

avec  $x_0 = x_{A_0}$   $y_0 = y_{A_0}$   
 $x_2 = x_{A_2}$   $y_2 = y_{A_2}$

$$\begin{aligned} &+ t^3 [(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2] \\ \Rightarrow &- 3t^2 [(x_0^2 + x_0x_2 + x_0x_{M_1} - x_2x_{M_1}) + (y_0^2 + y_0y_2 + y_0y_{M_1} - y_2y_{M_1})] \\ &+ t [(3x_0^2 - x_0x_2 - 5x_0x_{M_1} + x_2x_{M_1} + 2x_{M_1}^2) + (3y_0^2 - y_0y_2 - 5y_0y_{M_1} + y_2y_{M_1} + 2y_{M_1}^2)] \\ &- (x_0 - x_{M_1})^2 - (y_0 - y_{M_1})^2 = 0 \end{aligned}$$



$t$  de  $M_1 \approx 0,537706$

$$x_{A_1} \approx 16,817$$

$$y_{A_1} \approx 35,331$$

### B3 passant strictement par 3 points

a)  $P_1$  est fixe et la tangente en  $P_3$  est imposée.

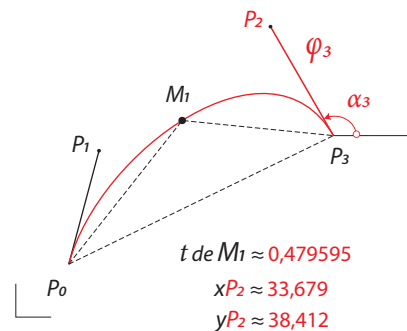
avec :  $x_{P_1}=11$   $y_{P_1}=22$  et  $\alpha_3 = 120^\circ$  ou  $-40^\circ$

$M_1$	22	26
$P_0$	7	7
$P_1$	11	22
$P_2$	??	??
$P_3$	42	24

$$\text{résoudre } \begin{cases} xM(t) = [xP_3 - xP_0 + 3(xP_1 - xP_2)]t^3 + 3(xP_0 + xP_2 - 2xP_1)t^2 + 3(xP_1 - xP_0)t + xP_0 \\ yM(t) = [yP_3 - yP_0 + 3(yP_1 - yP_2)]t^3 + 3(yP_0 + yP_2 - 2yP_1)t^2 + 3(yP_1 - yP_0)t + yP_0 \\ xP_2 = (\varphi_3 \cos(\alpha_3) + xP_3) \quad yP_2 = (\varphi_3 \sin(\alpha_3) + yP_3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^3 [ \vec{\alpha}_3(xP_0 - 3xP_1 + 2xP_3) - (yP_0 - 3yP_1 + 2yP_3) ] \\ + 3t^2 [ \vec{\alpha}_3(-xP_0 + 2xP_1 - xP_3) - (-yP_0 + 2yP_1 - yP_3) ] \\ + 3t [ \vec{\alpha}_3(xP_0 - xP_1) - (yP_0 - yP_1) ] \\ + \vec{\alpha}_3(xM_1 - xP_0) - (yM_1 - yP_0) = 0 \end{cases} \quad \text{calcul de } t_{(M_1)} \quad \text{A}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xP_2 = [ xM_1 - (1-t)^3 xP_0 - 3t(1-t)^2 xP_1 - t^3 xP_3 ] / [ 3t^2(1-t) ] \\ yP_2 = [ yM_1 - (1-t)^3 yP_0 - 3t(1-t)^2 yP_1 - t^3 yP_3 ] / [ 3t^2(1-t) ] \end{cases} \quad \text{Donc } \varphi_3 = \| \vec{P_3P_2} \|$$



b)  $P_2$  est fixe et la tangente en  $P_0$  est imposée.

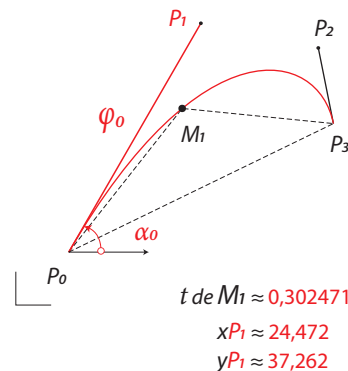
avec :  $x_{P_2}=40$   $y_{P_2}=34$  et  $\alpha_0 = 60^\circ$

$M_1$	22	26
$P_0$	7	7
$P_1$	??	??
$P_2$	40	34
$P_3$	42	24

$$\text{résoudre } \begin{cases} xM(t) = [xP_3 - xP_0 + 3(xP_1 - xP_2)]t^3 + 3(xP_0 + xP_2 - 2xP_1)t^2 + 3(xP_1 - xP_0)t + xP_0 \\ yM(t) = [yP_3 - yP_0 + 3(yP_1 - yP_2)]t^3 + 3(yP_0 + yP_2 - 2yP_1)t^2 + 3(yP_1 - yP_0)t + yP_0 \\ xP_1 = \varphi_0 \cos(\alpha_0) + xP_0 \quad yP_1 = \varphi_0 \sin(\alpha_0) + yP_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^3 [ \vec{\alpha}_0(-xP_3 - 2xP_0 + 3xP_2) - (-yP_3 - 2yP_0 + 3yP_2) ] \\ + 3t^2 [ \vec{\alpha}_0(xP_0 - xP_2) - (yP_0 - yP_2) ] \\ + \vec{\alpha}_0(xM_1 - xP_0) - (yM_1 - yP_0) = 0 \end{cases} \quad \text{calcul de } t_{(M_1)} \quad \text{B}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xP_1 = [ xM_1 - (1-t)^3 xP_0 - 3t^2(1-t) xP_2 - t^3 xP_3 ] / [ 3t(1-t)^2 ] \\ yP_1 = [ yM_1 - (1-t)^3 yP_0 - 3t^2(1-t) yP_2 - t^3 yP_3 ] / [ 3t(1-t)^2 ] \end{cases} \quad \text{Donc } \varphi_0 = \| \vec{P_0P_1} \|$$



### B3 passant strictement par 4 points (source : Mr. Krauss)

soit

	X	Y
$P_0 = M_0$	7	7
$M_1$	22	26
$M_2$	36	31
$P_3 = M_3$	42	24

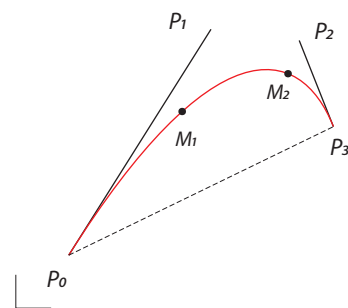
Dans ce cas il faut estimer  $t_1$  de  $M_1$  et  $t_2$  de  $M_2$

Exemple avec  $t_1 = 0,3$  et  $t_2 = 0,7$

$$\text{Résoudre } \begin{cases} 3t_1(1-t_1)^2 xP_1 + 3t_1^2(1-t_1) xP_2 = xM_1 - (1-t_1)^3 xP_0 - t_1^3 xP_3 \\ 3t_2(1-t_2)^2 xP_1 + 3t_2^2(1-t_2) xP_2 = xM_2 - (1-t_2)^3 xP_0 - t_2^3 xP_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-t_1) xP_1 + t_1 xP_2 = \frac{xM_1 - (1-t_1)^3 xP_0 - t_1^3 xP_3}{[3t_1(1-t_1)]} \\ (1-t_2) xP_1 + t_2 xP_2 = \frac{xM_2 - (1-t_2)^3 xP_0 - t_2^3 xP_3}{[3t_2(1-t_2)]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xP_1 = \frac{x\alpha_1 t_2 - x\alpha_2 t_1}{t_2 - t_1} \\ xP_2 = \frac{x\alpha_2(1-t_1) - x\alpha_1(1-t_2)}{t_2 - t_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-t_1) yP_1 + t_1 yP_2 = \frac{yM_1 - (1-t_1)^3 yP_0 - t_1^3 yP_3}{[3t_1(1-t_1)]} \\ (1-t_2) yP_1 + t_2 yP_2 = \frac{yM_2 - (1-t_2)^3 yP_0 - t_2^3 yP_3}{[3t_2(1-t_2)]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yP_1 = \frac{y\alpha_1 t_2 - y\alpha_2 t_1}{t_2 - t_1} \\ yP_2 = \frac{y\alpha_2(1-t_1) - y\alpha_1(1-t_2)}{t_2 - t_1} \end{cases}$$



	X	Y
$P_0$	7	7
$P_1$	25,810	36,873
$P_2$	37,476	35,397
$P_3$	42	24

NB : toutes ces définitions strictes peuvent engendrer des résultats incohérents ou aucunes solutions.

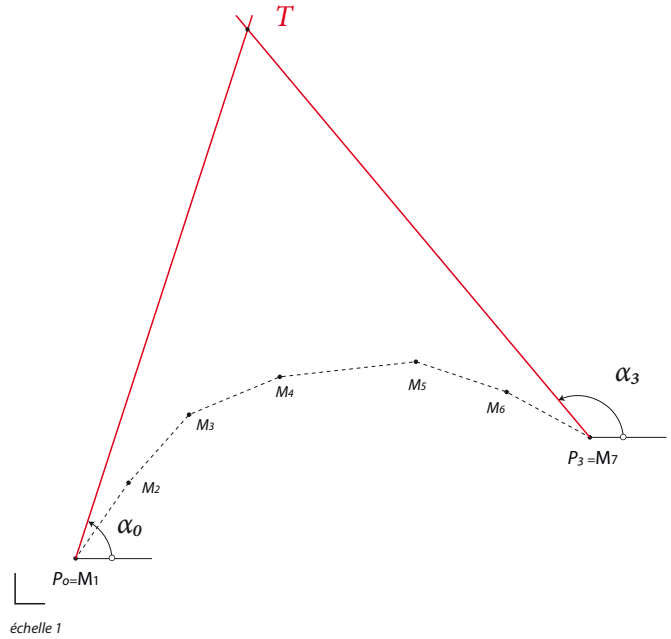
Lissage, ajustement, de points par une  $B_3$  avec l'algorithme «lissage» .

Méthode «Belharra» .

Exemple 1)

Données de départ ( calculs préliminaires)

	X	Y	t estimé	
$P_0 = M_1$	8	6	0	$\alpha_0 = 72^\circ$
$M_2$	15	16	0,14865	$\ P_0T\  = 73,55$
$M_3$	23	25	0,29331	
$M_4$	35	30	0,45957	
$M_5$	53	32	0,69247	$x_T = 30,729$
$M_6$	65	28	0,85921	$y_T = 75,952$
$P_3 = M_7$	76	22	1	$\ P_3T\  = 70,43$
				$\alpha_3 = 130^\circ$



**A)** Utilisons les formules de **(A)** qui permettent de définir  $\varphi_{3(M_n)}$  par rapport à  $P_1$  et un point  $M_n$

avec **(A)** nous pouvons calculer 5 valeurs possibles de  $P_2$  :  $P_{2(M_2)}, P_{2(M_3)}, P_{2(M_4)}, P_{2(M_5)}, P_{2(M_6)}$

et par conséquent :  $\varphi_{3(M_2)}, \varphi_{3(M_3)}, \varphi_{3(M_4)}, \varphi_{3(M_5)}, \varphi_{3(M_6)}$

$t^3 [ \vec{\alpha}_3(xP_0 - 3xP_1 + 2xP_3) - (yP_0 - 3yP_1 + 2yP_3) ]$ $+ 3t^2 [ \vec{\alpha}_3(-xP_0 + 2xP_1 - xP_3) - (-yP_0 + 2yP_1 - yP_3) ]$ $+ 3t [ \vec{\alpha}_3(xP_0 - xP_1) - (yP_0 - yP_1) ]$ $+ \vec{\alpha}_3(xM_n - xP_0) - (yM_n - yP_0) = 0$ <p style="text-align: right; color: red;">calcul de <math>t_{(M_n)}</math></p>	<b>(A)</b>
<p>avec <math>t = t_{(M_n)}</math></p> $xP_{2(t)} = [ xM_n - (1-t)^3 xP_0 - 3t(1-t)^2 xP_1 - t^3 xP_3 ] / [ 3t^2(1-t) ]$ $yP_{2(t)} = [ yM_n - (1-t)^3 yP_0 - 3t(1-t)^2 yP_1 - t^3 yP_3 ] / [ 3t^2(1-t) ]$	$\Rightarrow \varphi_{3(M_n)}$

NB: après avoir résolu l'équation du 3eme degré il faut choisir un  $t$  qui appartient à l'intervalle ]0 1[ sinon utiliser le  $t$  estimé .

NB : Au départ de l'algorithme  $P_1(\text{Moyen}) = T$  Les suivants seront calculés dans **B)**

Définissons  $\varphi_{3(\text{moyen})}$  avec une moyenne pondérée.

Le poid de  $\varphi_{3(M_n)}$  est l'inverse de la distance :  $M_n P_{2(M_n)} = \| M_n P_{2(M_n)} \|^{-1}$

Cela veut dire que plus  $P_{2(M_n)}$  est près de  $M_n$  plus son poid est fort.

$$\| M_2 P_{2(M_2)} \|^{-1} = W_2$$

$$\| M_3 P_{2(M_3)} \|^{-1} = W_3$$

$$\| M_4 P_{2(M_4)} \|^{-1} = W_4$$

$$\| M_5 P_{2(M_5)} \|^{-1} = W_5$$

$$\| M_6 P_{2(M_6)} \|^{-1} = W_6$$

$$\varphi_{3(\text{Moyen})} = \frac{\varphi_{3(M_2)} W_2 + \varphi_{3(M_3)} W_3 + \varphi_{3(M_4)} W_4 + \varphi_{3(M_5)} W_5 + \varphi_{3(M_6)} W_6}{W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6}$$

$$\Rightarrow P_2(\text{Moyen}) \quad \begin{aligned} xP_2 &= \varphi_{3(\text{Moyen})} \cos(\alpha_3) + xP_3 \\ yP_2 &= \varphi_{3(\text{Moyen})} \sin(\alpha_3) + yP_3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{puis aller à B)} \\ &\text{(page suivante)} \end{aligned}$$



# Allons plus loin !!

L'algorithme «*lissage*» a ses limites car les angles  $\alpha_0$  et  $\alpha_3$  sont fixes.

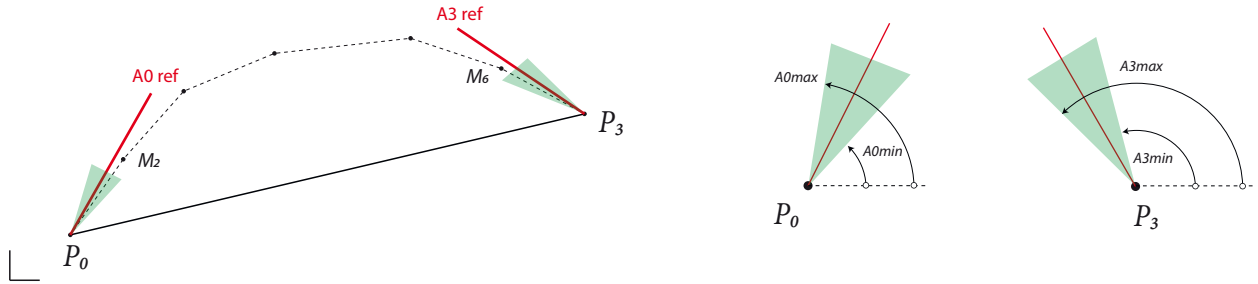
Pour avoir un processus de lissage complet il faut créer l'algorithme : «*MasterLiss*» qui gère les variations de ces angles.

a) Avant tout, pour éviter des boucles inutiles l'algo détermine les angles orientés **A0ref** et **A3ref** qui sont probablement une bonne référence pour le lissage final.

b) Pour se fixer une amplitude de lissage en **A** et **B** (en vert sur les images ci dessous) Il faut définir les angles orientés suivant avec un  $\Delta^\circ$  fixé à l'avance (**10° par exemple**) :

$A0min = A0ref - \Delta$  ,  $A0max = A0ref + \Delta$

$A3min = A3ref - \Delta$  ,  $A3max = A3ref + \Delta$



c) l'algorithme «*MasterLiss*» peut continuer, 4 cas sont possibles

les angles  $\alpha_0$  et  $\alpha_3$  sont libres «*Masterliss*» effectue  $20 \times 20 = 400$  boucles (incrément de  $1^\circ$ )

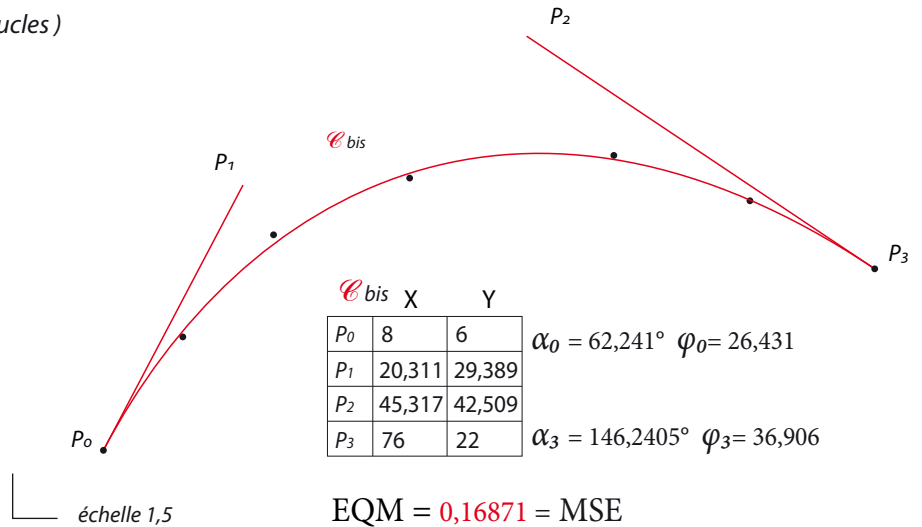
l'angle  $\alpha_0$  est fixe et  $\alpha_3$  est libre (20 boucles)

l'angle  $\alpha_0$  est libre et  $\alpha_3$  est fixe (20 boucles)

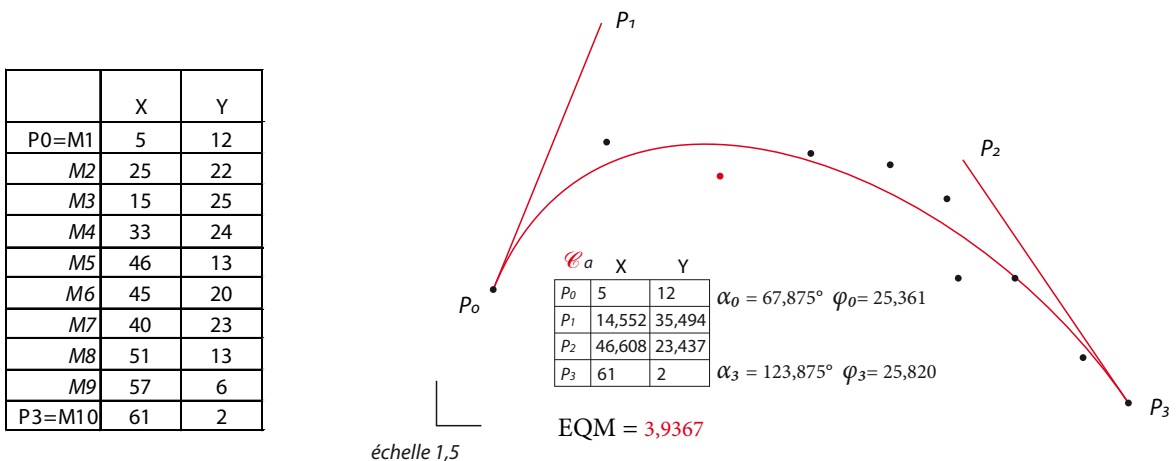
les angles  $\alpha_0$  et  $\alpha_3$  sont fixes (1 boucle)

Exemple 1bis)  $\alpha_0$  et  $\alpha_3$  sont libres.

«*Masterliss*» a détecté 70 Eqm < 1  
48 Eqm < 0,5  
14 Eqm < 0,25



un autre exemple : la progression est désordonnée (sauf M1 et M10)

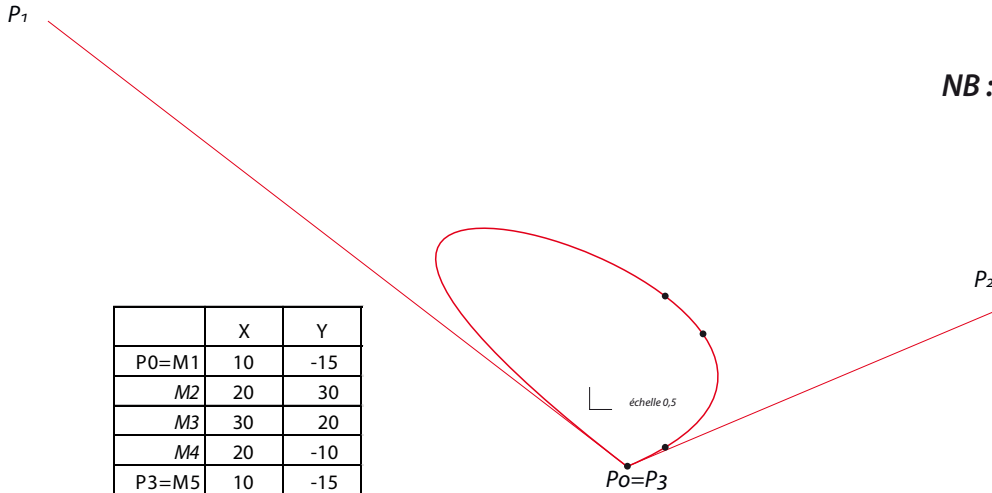




# Un autre algorithme de lissage (plus lent) : « MasterlissFree »

Cet algorithme ausculte sur 180° en  $P_0$  et  $P_3$  la progression des points  $M$  (Polyligne).  
 Il permet, autant que possible, de lisser des progressions : bizarres, avec 1 point d'inflexion etc...

**NB : le résultat peut être incorrect / imprécis**



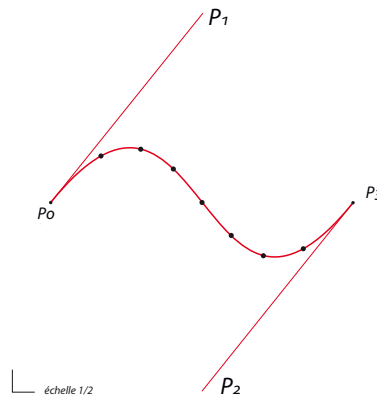
	X	Y
P0=M1	10	-15
M2	20	30
M3	30	20
M4	20	-10
P3=M5	10	-15

P0	10	-15
P1	-143,261	102,724
P2	109,645	27,020
P3	10	-15

$\alpha_0 = 142,47^\circ$   $\varphi_0 = 193,256$   
 $\alpha_3 = 22,865^\circ$   $\varphi_3 = 108,143$

EQM = 0,00003

progression créé avec :  
 $xP0=10$   $yP0=50$   $xP1=50$   $yP1=100$   
 $xP2=50$   $yP2=0$   $xP3=90$   $yP3=50$



	X	Y
P0 = M1	10,160	50,160
M2	23,451	62,475
M3	33,960	64,273
M4	42,594	59,039
M5	50,180	50,180
M6	57,906	41,461
M7	66,410	36,098
M8	76,969	37,945
P3 = M9	90,120	50,120

P0	10,16	50,16
P1	50,411	100,253
P2	50,148	0,240
P3	90,12	50,12

$\alpha_0 = 51,2^\circ$   $\varphi_0 = 64,26$   
 $\alpha_3 = 231,293^\circ$   $\varphi_3 = 63,92$

EQM = 0,09138

## Bon à savoir : comment détecter les points d'inflexion d'une polyligne ?

Tout d'abord il faut claculer les  $\alpha$  à l'aide des Angles orientés  $Aor1, Aor2$  etc...

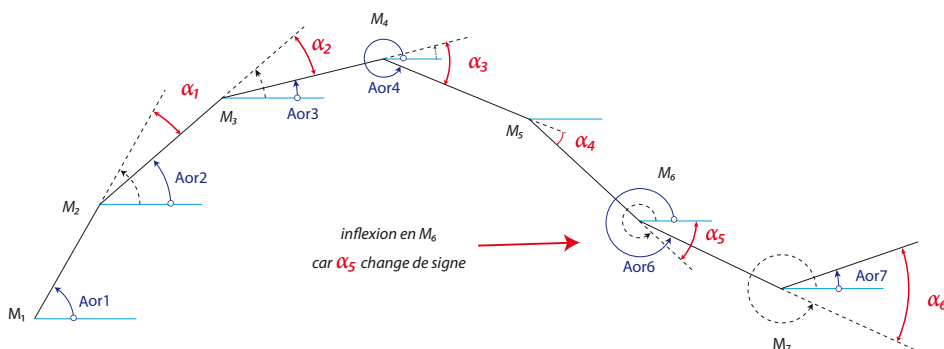
=>  $\alpha_1 = Aor2 - Aor1$ ,  $\alpha_2 = Aor3 - Aor2$  etc...

**Attention aux cas particuliers**

- 1) si on passe de  $Aor(n-1)$   $[0^\circ \ 90^\circ]$  vers  $Aor(n)$   $[270^\circ \ 360^\circ]$  =>  $\alpha(n) = -360 + Aor(n) - Aor(n-1)$  (exemple au point M4)
- 2) si on passe de  $Aor(n-1)$   $[270^\circ \ 360^\circ]$  vers  $Aor(n)$   $[0^\circ \ 90^\circ]$  =>  $\alpha(n) = 360 + Aor(n) - Aor(n-1)$  (exemple au point M7)

dans notre exemple :

$\alpha_5$  change de signe : >0 !! cela veut dire qu'il y a un point d'inflexion, en  $M_6$   
 par contre si nous inversons la progression ( $M_7$  vers  $M_1$ ) l'inflexion est en  $M_5$



## Comment résoudre un équation du 3ème degré ?

L'équation se présente sous la forme :  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Dans un premier temps nous allons simplifier les termes de cette équation

1) divisons tous les coefficients par :  $a$

$$\frac{ax^3}{a} + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx^2}{a} + \frac{d}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

2) changons de variable en posant :  $x = \left(z - \frac{B}{3}\right)$

$$\Rightarrow 1 \left(z - \frac{B}{3}\right)^3 + B \left(z - \frac{B}{3}\right)^2 + C \left(z - \frac{B}{3}\right) + D = 0$$

3) En développant et simplifiant  $\Rightarrow z^3 + pz + q = 0$

$$p = \left(C - \frac{B^2}{3}\right) \quad \text{et} \quad q = \left(\frac{2B^3}{27} + D - \frac{BC}{3}\right)$$

Le discriminant  $\Delta$  de  $z^3 + pz + q = 0$  est  $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$

Le signe et la valeur de  $\Delta$  impliquent 3 cas

**1er cas : si  $\Delta > 0$  il existe 1 racine réelle :**

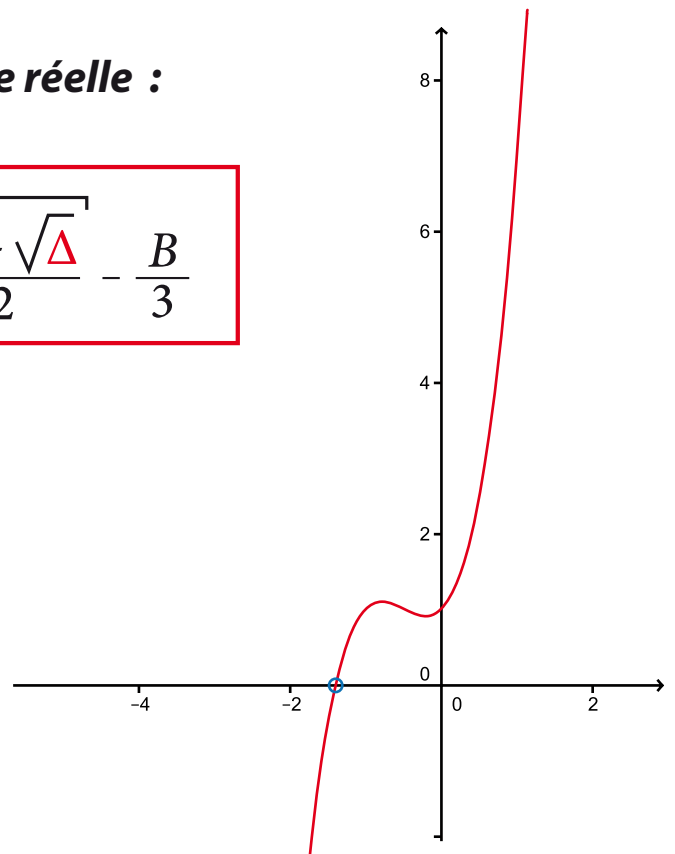
$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} - \frac{B}{3}$$

**Exemple 1**  $2x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$

$$\Rightarrow z^3 - 0,25z + 0,5 = 0$$

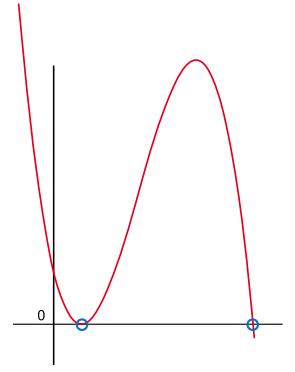
$$\Delta \approx 0,25$$

$$x_1 \approx -1,398$$



2<sup>ème</sup> cas : si  $\Delta = 0$  il existe «2» racines réelles :

$$x_1 = \frac{3q}{p} - \frac{B}{3} \quad x_2 = x_3 = -\frac{3q}{2p} - \frac{B}{3}$$



Exemple 2  $x^3 - 15x^2 + 27x - 13 = 0 \quad \Delta = 0$

$$\Rightarrow z^3 - 48z - 128 = 0 \Rightarrow x_1 = 13 \quad x_2 = x_3 = 1$$

3<sup>ème</sup> cas : si  $\Delta < 0$  il existe 3 racines réelles :

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left( \frac{\text{Arccos} \left( \frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right)}{3} \right) - \frac{B}{3}$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left( \frac{\text{Arccos} \left( \frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right) + 2\pi}{3} \right) - \frac{B}{3}$$

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left( \frac{\text{Arccos} \left( \frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right) + 4\pi}{3} \right) - \frac{B}{3}$$

Exemple 3  $2x^3 - 3x^2 - 4x + 2 = 0$

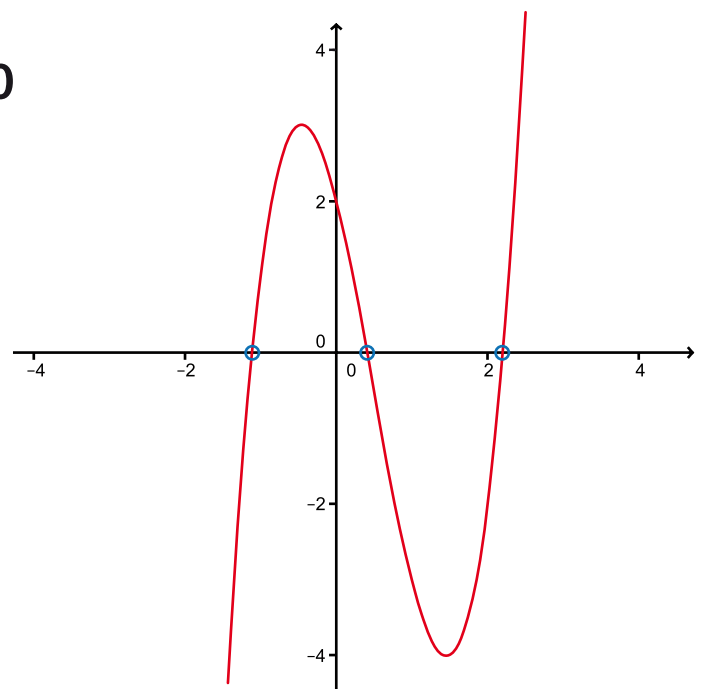
$$\Rightarrow z^3 - 2,75z - 0,25 = 0$$

$$\Delta \approx -3,02$$

$$x_1 \approx 2,02$$

$$x_2 \approx -1,11$$

$$x_3 \approx 0,41$$



## Changements de paramètres par rotation avec la formule du « changement de base » (*modifiée*)

Dans cet exemple le but est d'effectuer à la courbe  $\mathcal{P}$  une rotation  $\alpha$  par rapport à un centre de rotation  $\Omega$  et éventuellement une translation  $\Delta x, \Delta y$

Par calcul matriciel

$$P' \begin{pmatrix} x^{P'} \\ y^{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^P - x\Omega \\ y^P - y\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\Omega + \Delta x \\ y\Omega + \Delta y \end{pmatrix}$$

ou

par une formule directe

$$P' \begin{cases} x^{P'} = \cos \alpha (x^P - x\Omega) - \sin \alpha (y^P - y\Omega) + x\Omega + \Delta x \\ y^{P'} = \sin \alpha (x^P - x\Omega) + \cos \alpha (y^P - y\Omega) + y\Omega + \Delta y \end{cases}$$

$\mathcal{P}$	X	Y
$P_0$	45	15
$P_1$	72	60
$P_2$	15	45
$P_3$	75	15
Origine	0	0

avec

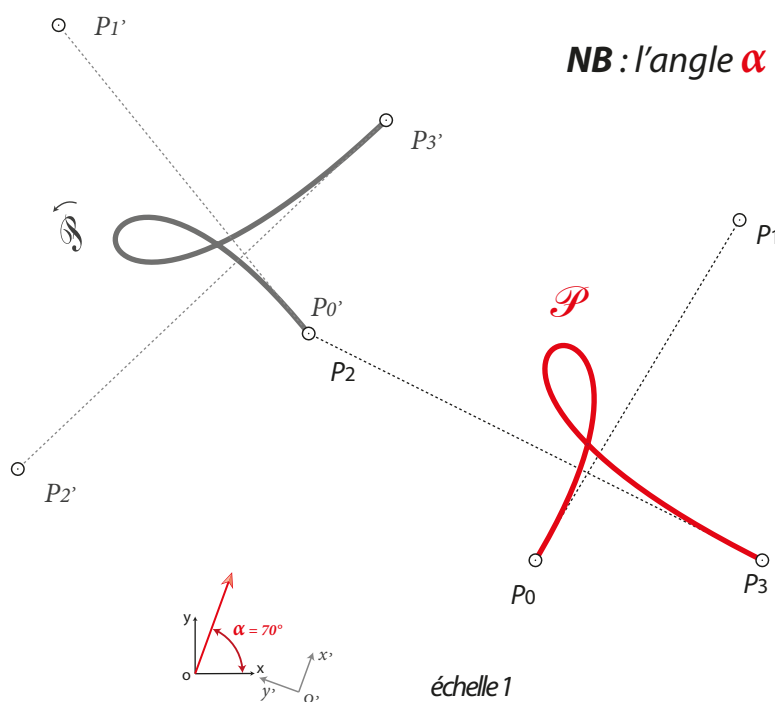
$$\alpha = 70^\circ$$

$$\Omega = P_0 \begin{cases} 45 \\ 15 \end{cases}$$

$$P_2 - P_0 \begin{cases} \Delta x = -30 \\ \Delta y = 30 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$\mathcal{P}'$	X	Y
$P_0'$	15	45
$P_1'$	-18,05	85,76
$P_2'$	-23,45	27,07
$P_3'$	25,26	73,19
Origine'	13,70	-2,42



Réciproquement

$$P \begin{pmatrix} x^P \\ y^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{P'} - x\Omega - \Delta x \\ y^{P'} - y\Omega - \Delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\Omega \\ y\Omega \end{pmatrix}$$

ou

$$P \begin{pmatrix} x^P \\ y^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{P'} - x\Omega - \Delta x \\ y^{P'} - y\Omega - \Delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\Omega \\ y\Omega \end{pmatrix}$$

$$P \begin{cases} x^P = \cos(-\alpha)(x^{P'} - x\Omega - \Delta x) - \sin(-\alpha)(y^{P'} - y\Omega - \Delta y) + x\Omega \\ y^P = \sin(-\alpha)(x^{P'} - x\Omega - \Delta x) + \cos(-\alpha)(y^{P'} - y\Omega - \Delta y) + y\Omega \end{cases}$$

$$P \begin{cases} x^P = \cos(\alpha)(x^{P'} - x\Omega - \Delta x) + \sin(\alpha)(y^{P'} - y\Omega - \Delta y) + x\Omega \\ y^P = -\sin(\alpha)(x^{P'} - x\Omega - \Delta x) + \cos(\alpha)(y^{P'} - y\Omega - \Delta y) + y\Omega \end{cases}$$

## Intersection de 2 droites par la méthode de Mr. Delambre adaptée au sens trigonométrique. (droite définie par un point et son coefficient directeur)

exemple avec les données de la page 24

$$x_{\Omega} = x_A + \frac{(y_A - y_B) - (x_A - x_B) \tan(\beta)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)} = 7,525$$

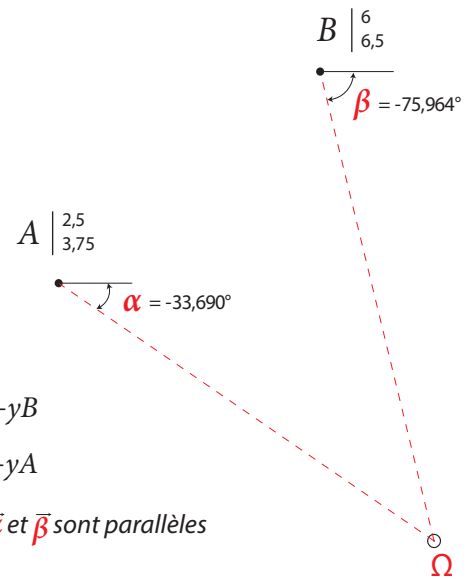
$$y_{\Omega} = y_A + (x_{\Omega} - x_A) \tan(\alpha) = 0,4$$

si  $\alpha = 90^\circ$  ou  $-90^\circ$  alors  $x_{\Omega} = x_A$  et  $y_{\Omega} = \tan(\beta)(x_A - x_B) + y_B$



si  $\beta = 90^\circ$  ou  $-90^\circ$  alors  $x_{\Omega} = x_B$  et  $y_{\Omega} = \tan(\alpha)(x_B - x_A) + y_A$

si  $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$  l'intersection est indéfinie car les vecteurs  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$  sont parallèles



## Intersection de 2 cercles, méthode topographique [3]

Données initiales

	X	Y	
$C_1$	30	23	$R_1$ 19
$C_2$	65	30	$R_2$ 25

$\|C_1 C_2\| = 35,693$

Définition de :  $\alpha_1, \alpha_2$

$$\cos(\alpha_1) = \frac{R_1^2 + \|C_1 C_2\|^2 - R_2^2}{2R_1 \|C_1 C_2\|} \Rightarrow \alpha_1 \approx 41,871^\circ$$

$$\cos(\alpha_2) = \frac{R_2^2 + \|C_1 C_2\|^2 - R_1^2}{2R_2 \|C_1 C_2\|} \Rightarrow \alpha_2 \approx 30,482^\circ$$

Définition des angles orientés :  $C_1 \hat{I}_1, C_1 \hat{I}_2$

$$\text{Aor } C_1 \hat{I}_1 = \text{atan2}(x_{C_2} - x_{C_1}; y_{C_2} - y_{C_1}) \times \frac{180}{\pi} + \alpha_1 \approx 53,181^\circ$$

$$\text{Aor } C_1 \hat{I}_2 = \text{atan2}(x_{C_2} - x_{C_1}; y_{C_2} - y_{C_1}) \times \frac{180}{\pi} - \alpha_1 \approx -30,561^\circ$$

Définition de :  $\hat{I}_1, \hat{I}_2$  par coordonnées polaires à partir de  $C_1$

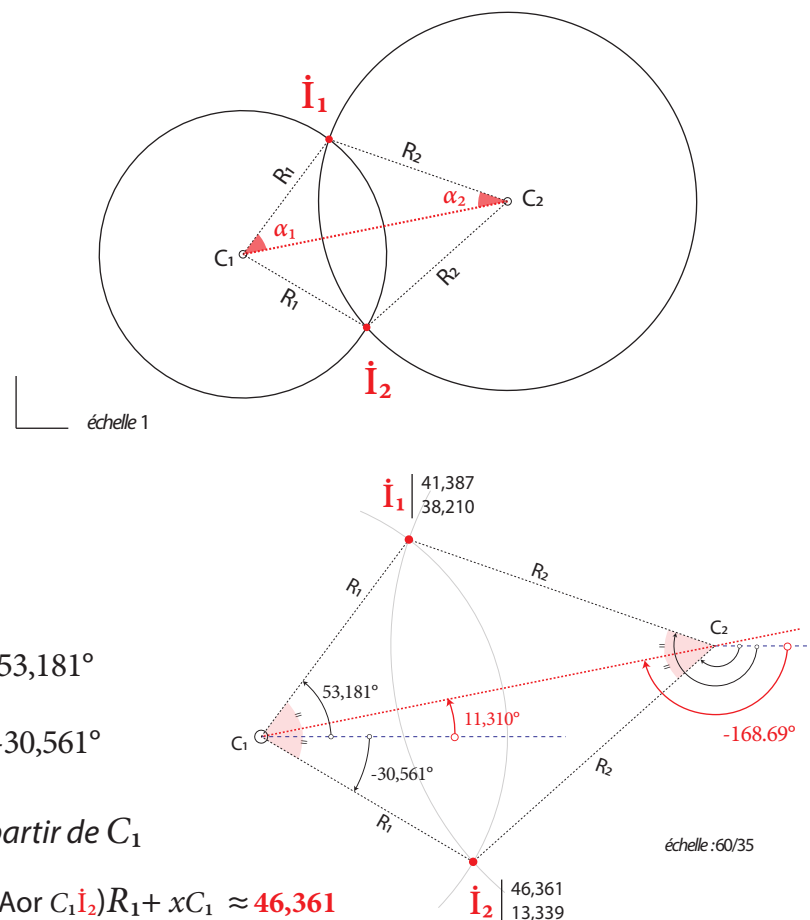
$$x_{\hat{I}_1} = \cos(\text{Aor } C_1 \hat{I}_1) R_1 + x_{C_1} \approx 41,387 \quad x_{\hat{I}_2} = \cos(\text{Aor } C_1 \hat{I}_2) R_1 + x_{C_1} \approx 46,361$$

$$y_{\hat{I}_1} = \sin(\text{Aor } C_1 \hat{I}_1) R_1 + y_{C_1} \approx 38,210 \quad y_{\hat{I}_2} = \sin(\text{Aor } C_1 \hat{I}_2) R_1 + y_{C_1} \approx 13,339$$

Cas particuliers

si  $\|C_1 C_2\| = R_1 + R_2 \Rightarrow$  les cercles sont tangents extérieurement

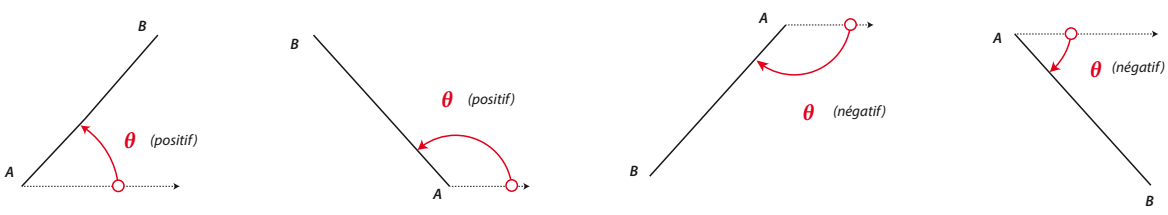
si  $\|C_1 C_2\| = |R_1 - R_2| \Rightarrow$  les cercles sont tangents intérieurement



# Angles orientés.

Un angle orienté  $\theta$  débute toujours sur un axe parallèle à celui du repère orthonormé : ox  
 Il peut être positif ou négatif.

Dans le domaine des «nombres complexes» cet angle est l'argument  $\theta$ .



Constatons que, grace à cet angle, **B** est bien **orienté** par rapport à **A**

# Coordonnées polaires.

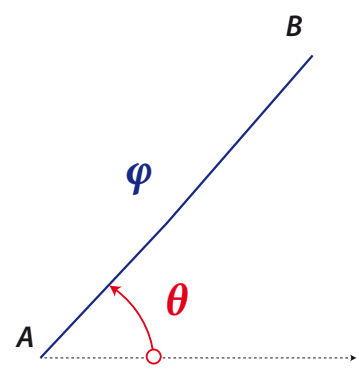
Les coordonnées polaires de **B** par rapport à **A** sont : la distance **AB**  $\varphi$  et l'angle orienté  $\theta$

Dans le domaine des «nombres complexes» la distance **AB** est le **module R**

Les coord. polaires permettent de définir les coordonnées cartésiennes de **B** par rapport à **A**

$$xB = xA + \varphi \cos(\theta)$$

$$yB = yA + \varphi \sin(\theta)$$



# Quelques formules importantes

$$\Delta x_{(AB)} = xB - xA = \varphi \cos(\theta)$$

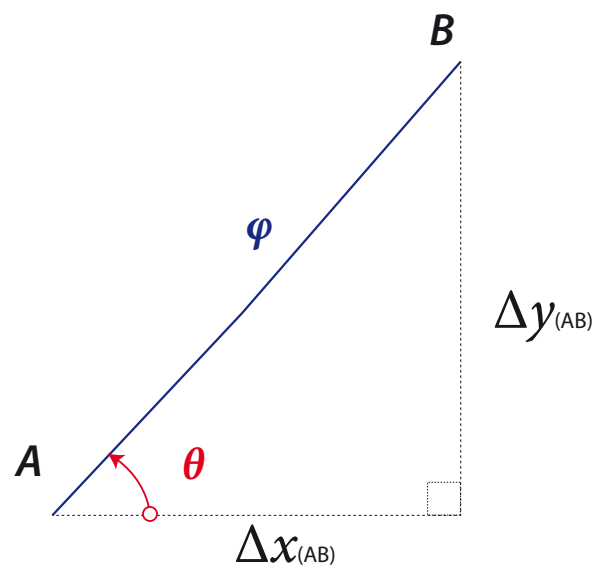
$$\Delta y_{(AB)} = yB - yA = \varphi \sin(\theta)$$

$$\tan(\theta) = \frac{\Delta y_{(AB)}}{\Delta x_{(AB)}}$$

$$\varphi = \sqrt{(\Delta x_{(AB)})^2 + (\Delta y_{(AB)})^2}$$

$$\varphi = \frac{\Delta x_{(AB)}}{\cos(\theta)} = \frac{\Delta y_{(AB)}}{\sin(\theta)}$$

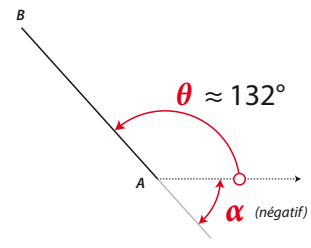
$$\theta = \text{atan2}(\Delta x_{(AB)} ; \Delta y_{(AB)})$$



# Pourquoi définir un angle orienté ?

exemple avec  $A \begin{vmatrix} -15 \\ 5 \end{vmatrix}$   $B \begin{vmatrix} -33 \\ 25 \end{vmatrix}$   $\varphi \approx 26,9$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y(AB)}{\Delta x(AB)} = \frac{-18}{20} \Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\left(\frac{-18}{20}\right) \approx -48^\circ$$



calculons les coordonnées de B à l'aide de phi et alpha

$x_B = x_A + \varphi \cos(\alpha) = 3 ?$  il devrait être négatif

$y_B = y_A + \varphi \sin(\alpha) = -15 ?$  il devrait être positif

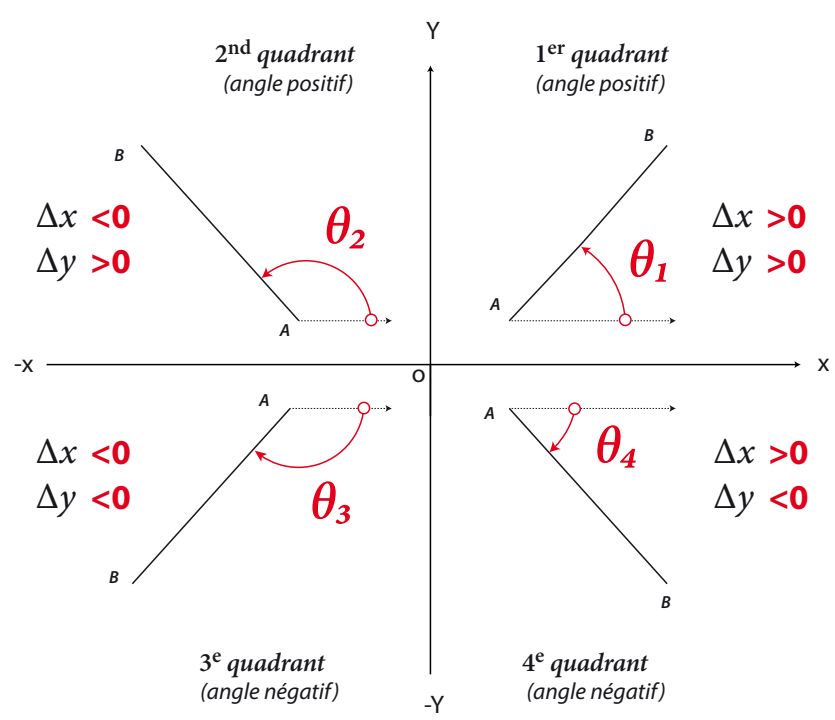


les résultats sont incohérents !!

Dans cet exemple theta doit être  $= 180^\circ - |-48^\circ| \Rightarrow \theta \approx 132^\circ$  c'est l'angle supplémentaire de |alpha|

Pour définir correctement un angle orienté il faut connaître la position de AB par rapport aux 4 quadrants du repère orthonormé.

- 1) si  $\Delta x_{(AB)} > 0$  et  $\Delta y_{(AB)} > 0$  alors AB est orienté vers le 1<sup>er</sup> quadrant  $\Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\left(\frac{\Delta y_{(AB)}}{\Delta x_{(AB)}}\right) \Rightarrow \theta_1 = |\alpha|$
- 2) si  $\Delta x_{(AB)} < 0$  et  $\Delta y_{(AB)} > 0$  alors AB est orienté vers le 2<sup>nd</sup> quadrant  $\Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\left(\frac{\Delta y_{(AB)}}{\Delta x_{(AB)}}\right) \Rightarrow \theta_2 = 180^\circ - |\alpha|$
- 3) si  $\Delta x_{(AB)} < 0$  et  $\Delta y_{(AB)} < 0$  alors AB est orienté vers le 3<sup>e</sup> quadrant  $\Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\left(\frac{\Delta y_{(AB)}}{\Delta x_{(AB)}}\right) \Rightarrow \theta_3 = |\alpha| - 180^\circ$
- 4) si  $\Delta x_{(AB)} > 0$  et  $\Delta y_{(AB)} < 0$  alors AB est orienté vers le 4<sup>e</sup> quadrant  $\Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\left(\frac{\Delta y_{(AB)}}{\Delta x_{(AB)}}\right) \Rightarrow \theta_4 = -|\alpha|$



les tableurs ont intégrés ce calcul particulier par la fonction : **Atan2**(Delta x ; Delta y)

## Le cercle et ses tangentes

a) calcul des tangentes :  $IT = IT'$

$$\begin{aligned}
 &= R \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = R \cotan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = OI \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = OI \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
 &= \frac{HI}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{HI}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{TH}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{TH}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\
 &= \sqrt{HI^2 + TH^2} = \sqrt{OI^2 - OT^2} = \sqrt{IM \times IM'} = \sqrt{HI \times OI}
 \end{aligned}$$

b) calcul du rayon : R

$$\begin{aligned}
 &= IT \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = IT \cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) = OI \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = OI \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 &= \frac{TH}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{TH}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{OH}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{OH}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\
 &= \sqrt{TH^2 + OH^2} = \sqrt{OI^2 - IT^2} = \sqrt{OH \times OI} = \frac{C^2}{8F} + \frac{F}{2}
 \end{aligned}$$

c) calcul de la corde :  $TT' = C$

$$\begin{aligned}
 &= 2R \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2IT \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2IT \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 &= 2OH \cotan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2OH \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2HI \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2HI \cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
 &= 2\sqrt{IT^2 - HI^2} = 2\sqrt{OT^2 - OH^2} = 2\sqrt{OH \times HI} = 2\sqrt{2 \times R \times F - F^2}
 \end{aligned}$$

d) calcul de la flèche :  $OM - OH = HM = F$

$$= R \left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = R \left(1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = R - \sqrt{R^2 - C^2/4}$$





## Constantes

maxLissage = 500 *nombre maximum de points de la polyligne*  
 Phi = 0.552284749831575 *cest la valeur de  $\varphi$  d'un arc de cercle simulé de rayon 1, son angle au centre = 90°*  
 radian = 0.01745329251994329577 *cest la valeur de de 1° en radian*  
 cPi = 3.14159265358979323846  
 c0 = 0.00000000000000000001 *utile pour éviter des divisions par 0*  
 infinity = 9938196601125010515179 *simule une infinité*  
 Epsmach = 2E-16 *pour les calculs matriciels*

## Type Tableaux

coordM = Array[1..maxLissage] Of Double *coordonnées des points M (x, y, et/ou z)*  
 coordP = Array[1..maxLissage] Of Double *coordonnées des points P (x, y, et/ou z)*  
 pointBezier = Array[0..3,0..3] Of Double *points de définition des courbes de Bézier B3*  
 B3trace = Array[0..3,0..3] Of Longint *nécessaire au tracage des courbes*  
 PointInfo = Array[1..100] Of Integer *généré par DetInflex*  
 Mat = Array[1..maxLissage,1..maxLissage] of double  
 Mat1 = Array[1..maxLissage] of double *utilisés pour les calculs matriciels*  
 VECT = ARRAY[1..maxLissage] of double

## Variables globales

t, t1, t2 : double *paramètres 't' des équations paramétriques*  
 A0, A3, D0, D3 : Double *respectivement angles orientés de P0P1 P3P2  $\alpha_0, \alpha_3$  et les normes P0P1 P3P2  $\varphi_0$  et  $\varphi_3$*   
 xB3, yB3 : Double *coordonnées d'un point de paramètre t d'une B3 : généré par B3coord*  
 typ : Integer *renseigne le type de courbe de bézier (1 à 5) procédure B3type*  
 Psta01 : Integer *renseigne si la B3 a 0 1 ou 2 points stationnaires ou de croisement sur ]0 1[ B3type Génère Psta01*  
 a2v : coordM *tableau des angles entre 2 vecteurs construit par Angle2v*  
 nbINF, nbDIS : integer *nombre d'inflexions et/ou de discontinuités d'une polyligne (Angle2v)*  
 INFat, DISat : Pointinfo *situe les points d'inflexions ou de discontinuités d'une polyligne (Angle2v)*  
 NBsol, sol1, sol2, sol3 : double *nombre de solutions et solutions déterminés par Solve2 et Solve3*  
 Xint, Yint : double *résultat de l'intersection de 2 droites généré par Inter2D*  
 RDC, xRC, yRC : double *rayon de courbure et coordonnées de son centre relatif au point M(t), généré par B3rdc*  
 xNB, yNB, xNBr, yNBr : coordM *coordonnées déterminées par Newbase et NewbaseReci*  
 B3clotho : pointbezier *résultat de CLothoB3*  
 B3pro : pointBezier *résultat de B3prolonge*  
 B3prosub : pointBezier *résultat de B3prosubAB*  
 B3fus : pointBezier *résultat de B3fusion*  
 B3a, B3b : pointBezier *résultat de B3subdivise*  
 AireA, AireB, AireC : double  
 Ba, Bb, Bc : pointBezier *générés par B3aire*  
 NBaire : integer  
 xC, yC, xI, yI, rayon, corde, fleche, angle0centre, A0Cvrai : Double *dans procédure Arcinfo*  
 AireSecteur, aireSegment, airePointe, longArc : Double  
 testColin : integer *test de colinéarité généré par Arc2B3 si 0 pas de colinéarité, si 1 oui*  
 Arc1, Arc2, Arc3, Arc4 : pointbezier *généré par Arc2B3*  
 NBarc : integer *nombres d'arcs générés par Arc2B3*  
 B3arc90 : pointbezier *arc de cercle simulé, son angle au centre est  $\leq 91^\circ$  résultat de Arc0\_90*  
 c1, c2, c3, c4 : pointbezier *génère un cercle unité par 4 B3 grace à CercleUnite*  
 cc1, cc2, cc3, cc4 : pointbezier *construit un cercle ou une ellipse par CercleB3*  
 XCreg, YCreg, EQMregcirc, statRC, Radreg, Rmin, Rmax : double *résultats de RegCirc*  
 B3poly, B3param : pointbezier *générés par RegPoly et ParamB3*  
 EQMpoly, statPoly : Double  
 B3liss, B3free, B3fitted, B3preced : pointbezier  
 EQMliss, statLiss : double *résultats des procédures de lissage*  
 EQMfree, statFree : double  
 NBliss : integer = 0 **IMPORTANT** *nécessaire pour un lissage multiple*  
 B3pass, B2pass, B1pass : mat *matrices de passage*  
 Matprod, MatprodAB : mat *produit de matrices*  
 Matsom, Transmat : mat *somme et transposée d'une matrice*  
 MATinv, MatX : mat *inverse d'une matrice et solution d'un système linéaire de matrices :  $AX = B$*   
 DET : double *déterminant d'une matrice*  
 coef, coef\_1 : mat1 *coefficients d'un polynôme*

- function **Fact**(*N*:integer):longint *factorielle*
- function **Tan**(*alpha*:double):double *tangente d'un angle en radian*
- function **Atan1**(*x1, y1, x2, y2*:double):double *Angle simple entre 2 points (en radian)*
- function **Atan2**(*x1, y1, x2, y2*:double):double *angle orienté 1 vers 2 (1er et 2ème quadrant positif, 3ème et 4ème négatif)*
- function **Atan4**(*x1, y1, x2, y2*:double):double *angle orienté 1 vers 2 toujours positif*
- function **Norme**(*x1, y1, x2, y2*:double):double *norme, distance entre 2 points*
- function **Cuberoot**(*Num*:double):double *racine cubique d'un nombre*
- function **Sgn**(*X*:double):double *signe d'un nombre 1 il est positif -1 négatif*
- function **PolyEval**(*X*:double;*coef3*:mat1;*deg*:integer):double *f(x) d'un polynôme*  
*NB le sens de coef3 doit être par exemple : 1 +1x +3x<sup>2</sup> +2x<sup>3</sup> deg est le degré du polynôme*
- function **MoyPond**(*X, poidX*:coordM;*deb, fin*:integer):double *moyenne pondérée*  
*X est un tableau de nombres, poidX les poids respectifs de ces nombres.*  
*deb, fin permet de calculer cette moyenne sur une partie de ce tableau.*
- function **moyenne**(*X*:coordM; ;*deb, fin*:integer;*op*:integer):double *4 moyennes possibles*  
*si op = 1 moyenne simple, si 2 géométrique, si 3 harmonique, si 4 quadratique*
- function **EQM**(*Ecart*:coordM;*deb, fin*:integer):double *Ecart Quadratique Moyen utile aux processus de lissages.*
- function **AirePolygon**(*xM, Ym*:coordM;*N*:integer):double *calcule la valeur absolue de l'aire d'un polygone*
- function **Nettoie**(*Ligne*:string):string *nettoie Ligne en vue d'extraire les X Y d'une polyligne, voire Z ou les valeurs d'une matrice.*  
*NB la ligne doit contenir : des espaces et/ou tabulations, des " . ' et/ou ' , ' et des chiffres.*  
*IMPORTANT : un CR est obligatoire sur toutes les fin de lignes du fichier .txt contenant les données à extraire (en particulier la dernière).*  
*La procédure LirePoint située dans le/les progammes 'Main' construit les tableaux : xP, yP et/ou zP nbL est le nombre de points.*  
*similairement LireMat construit MatP, le nombre de lignes et de colonnes seront disponibles dans ML, MC: integer*  
*NB la/les lignes, d'éventuels commentaires, doivent être précédées du caractère '%' ; LireB3 lit les pts. de définition d'une B3 et t construit B3point*
- procedure **Angle2v**(*xM, Ym*:coordM;*N*:integer) *construit le tableau a2v, de taille N-2 contenant les angles entre 2 vecteurs*
- procedure **DetInflex**(*xM, Ym*:coordM;*N, aff*:integer) *détecte les points d'inflexions et de discontinuités par rapport à a2v*  
*le nombres de points d'inflexions et de discontinuités sont dans nbINF, nbDIS*  
*leur position dans la polyligne est dans INFat, DISat si aff > 0 les datas de précision aff seront affichés sur la console DOS*
- procedure **Solve2**(*a, b, c*:longint) *résoud une équation du second degré et renseigne NBsol, sol1, sol2*
- procedure **Solve3**(*a, b, c, d*:longint) *résoud une équation du 3ème degré et renseigne NBsol, sol1, sol2, sol3*
- function **t\_unique**(*tk*:double):double *compare tk avec sol1, sol2, sol3 (tk est un paramètre t estimé)*  
*renvoie, si elle existe, la solution unique incluse dans [0 1]. Si plusieurs solutions dans [0 1] la plus rapprochée de tk sera choisie.*  
*Si pas de solutions dans [0 1] la fonction retournera la valeur tk*
- procedure **inter2D**(*xA, xA, tgtA, xB, yB, tgtB*:double) *intersection de 2 droites par la méthode de Delambre (modifiée)*  
*tgtA et tgtB sont les tangentes des angles dirigés vers le point d'intersection. Résultat dans Xint, Yint*
- function **Alphadef**(*x1, y1, x2, y2, x3, y3*:double):double  
*renvoie l'angle orienté de la tangente au cercle passant par 3 pts au point x1 y1*
- procedure **NewBase**(*xM, Ym*:coordM;*N*:integer;*alpha, Xom, Yom, dx, dy, echelle*:double)  
*changement de base des coordonnées xM, yM*  
*alpha = angle de rotation, Xom, Yom = centre de rotation, dx, dy = déplacement, echelle = mise à l'échelle, résultats dans xNB, yNB*
- procedure **NewBreci**(*xM, Ym*:coordM;*N*:integer;*alpha, Xom, Yom, dx, dy, echelle*:double)  
*réciproque du changement de base, résultats dans xNB, yNB*
- procedure **CercleUnite** *définis un cercle unité par 4 B3 c1, c2, c3, c4 (sens trigonométrique)*  
*son centre est en x=0, y=0 et commence au point x=1 y=0*
- procedure **CercleB3**(*xC, yC, Rad, echX, echY, rotation*:double) *construit un cercle ou un ellipse par 4 B3*  
*xC, yC = centre du cercle, Rad son rayon, echx, echY échelles, angle de rotation (0 si cercle)*  
*tous les calculs se font par rapport au centre du cercle/ellipse. Résultat dans cc1, cc2, cc3, cc4*

**fonction AOC**( $x1, y1, x2, y2, x3, y3$ :double):double *calcule l'angle au centre vrai d'un arc passant par un triplet (il peut  $\in ]0 360^\circ]$  ou  $]0 -360^\circ]$ )*

**procedure Arc0\_90**( $x1, y1, x2, y2, x3, y3$ :double) *simule un arc de cercle passant par le triplet. l'AOC maximum est de  $91^\circ$ , la courbe B3arc90 est générée*

**procedure Arc2B3**( $xx1, yy1, xx2, yy2, xx3, yy3$ :double) *définis un arc de cercle passant par le triplet  $|AOC| \in ]0 360^\circ]$  le nombre d'arcs nécessaires est renseigné par NBarc les B3 générées sont: Arc1, Arc2, Arc3, Arc4*

**fonction ARClong**( $x1, y1, x2, y2, x3, y3$ :double):double *renvoie la longueur d'un arc passant par 3 points utilisé par B3long, clothoAmoyen NB: l'angle au centre vrai doit  $\in ]0 180[$*

**procedure Arcinfo**( $x1, y1, x2, y2, x3, y3$ :double) *calcule divers éléments d'un arc de cercle passant par 3 points centre du cercle: xC, yC intersection des tangentes: xI, yI, rayon, corde, fleche, angle0centre  $\in ]0 180[$  AOCvrai, aireSecteur, aireSegment, airePointe, longArc*

**procedure B3coord**(B3def:pointBezier;t:double) *coordonnées d'un point M(t): xB3, yB3 de la courbe B3def*

**procedure B3write**(B3def:pointBezier;aff:integer) *si aff > 0 les données de précision aff sont affichées sur la console DOS Calcule les points de définitions d'une B3 ainsi que ses angles (en degré)  $\alpha_0, \alpha_3$  dans A0, A3 et ses distances  $\varphi_0, \varphi_3$  dans D0, D3*

**procedure B3type**(B3def:pointBezier;aff:integer) *détermine le type de la B3 dans Typ et Psta01 = nb de Pts sta. sur [0 1] 1 => 1 point d'inflex, 2 => 2 points d'inflex, 3 => 1 point de rebroussement, 4 => 1 point de croisement, 5 => une parabole, 0 => une droite si aff > 0 affiche les coordonnées de ces points stationnaires ainsi que leur paramètres t1, t2*

**fonction B3long**(B3def:pointBezier):double *longueur (abscisse curviligne) d'une B3 sur [0 1]*

**fonction B3rdc**(B3def:pointBezier;t:double):double *rayon de courbure d'une B3 en un point M(t) calcule aussi les coordonnées du centre de courbure xRC, yRC et CCtest Si CCtest = -1 cela veut dire que la courbe est concave en ce point, sinon convexe*

**procedure ClothoB3**(angledep, xdep, ydep, xfin, yfin, xcercle, ycercle:double;sens:integer) *simule un arc de clothoïde par une B3, la courbe B3clo est générée. xdep, ydep, angledep = coordonnées et angle de l'axe routier au départ de la clotho xfin, yfin = coord. du début de la partie circulaire à raccorder. xcercle, ycercle = coordonnées du centre du cercle si sens = 1 alors la clotho entre dans un secteur circulaire sinon elle en sort*

**fonction ClothoAmoyen**(B3def:pointBezier):double *renvoie le paramètre A moyen d'une clothoïde simulée*

**procedure B3fusion**(B1, B2:pointBezier;option:integer) *fusionne 2 courbes liées dans B3fus si option=1 B3fus passera par le point de contact sinon elle n'y passera peut-être pas.*

**procedure B3sudivise**(B3def:pointBezier;tsub:double) *subdivise une B3 en 2 parties en M(tsub) => B3a B3b*

**procedure B3prolonge**(B3def:pointBezier;t:double) *prolonge une B3 jusqu'à un point M(t) : t < 0 ou > 1 => B3pro*

**procedure B3proSubAB**(B3ini:pointBezier;tA, tB:double) *extraite une partie de la B3, sens = tA vers tB => B3prosub*

**fonction B3aireSimple**(B3def:pointBezier):double *aire simple d'une B3 sur [0 1] NB il ne doit pas avoir de points stationnaires ou de croisements sur ]0 1[*

**fonction B3aireAB**(B3def:pointBezier;tA, tB:double):double *aire sur [tA tB] NB il ne doit pas avoir de points stationnaires ou de croisements sur ]tA tB[*

**procedure B3aire**(B3def:pointBezier;aff:integer):double *prend en compte les points stationnaires ou de croisements sur ]0 1[ le nombre d'aires est renseigné par NBaire, les aires et B3 générées sont: aireA, aireB, aireC et Ba, Bb, Bc*

**fonction DistoB3**(B3def:pointBezier;xM, yM, testim:double):double *distance minimum d'un point M à une B3 le paramètre estimé testim est nécessaire pour optimiser la dichotomie Si la distance est négative cela veut dire que le point M est à l'intérieur de la courbe.*

- procedure **Lissage**( $xM, yM$ :coordM;  $N$ :integer;  $A0, A3$ :double) *lisse, ajuste les points M par : B3fitted*  
*les angles  $A0, A3$  sont fixes,  $N$  est le nombre de points à lisser*  
*Méthode BELHARRA (créé par Alexandre Christophe GLON le 19-09-2019)*
- procedure **MasterLiss**( $xM, yM$ :coordM;  $deb, fin$ :integer;  $Alpha0, Alpha3$ :double) *Lisse les points M et génère B3Liss*  
*Grace à  $deb, fin$  elle lisse qu'une partie de la polyligne. Très utile si on veut effectuer un lissage multiple, successif.*  
*Si la valeur de l'angle  $Alpha0$  et/ou  $Alpha3$  est  $\geq 100$  cela voudra dire que  $A0$  et/ou  $A3$  sont libres et peuvent varier.*  
*Dans le cas contraire le/les angles sont fixes, aucune variation ne sera appliquée sur les angles concernés.*  
*NB: ces angles (en radian) doivent être orientés, par précaution j'ai fait en sorte qu'ils soient tous positifs.*  
*La précision du lissage est renseignée par  $statLiss = EQMliss$  Statistiquement c'est l'Ecart Quadratique Moyen = EQM ou MSE*  
*Cette procédure est adaptée pour une suite continue de points M sans points doubles ou stationnaires.*  
*IMPORTANT sauf cas extrêmes B3Liss n'aura pas de points stationnaires ou doubles sur ]0 1[*
- procedure **MasterLissFree**( $xM, yM$ :coordM;  $deb, fin$ :integer) *Lisse les points M par B3free (méthode plus lente)*  
*Elle ausculte la polyligne en variant les distances  $D0$  et  $D3$  et les angles  $A0, A3$  sur  $180^\circ$ .*  
*Elle permet de lisser des progressions bizarres etc.. mais le résultat est parfois incohérent, imprécis.*  
*La précision du lissage (EQM) est renseignée par  $statFree = EQMfree$*
- procedure **RegCirc**( $xM, yM$ :coordM;  $N$ :integer) *Lisse la polyligne par une Régression Circulaire (méthode des moindres carrés)*  
 $XCreg, YCreg, Radreg, Rmin, Rmax, statRC = EQMregCirc$ , sont les résultats de cette régression.
- procedure **RegPoly**( $xx, yy$ :coordM;  $deb, fin, DEG, op$ :integer) *Lisse par Régression Polynomiale (méthode des moindres carrés)*  
 *$deb, fin$  permet de sélectionner une partie des points.  $DEG$  est le degré du polynôme recherché.*  
*si  $op = 1$  un changement de repère est effectué dans  $xx, yy$  faisant en sorte que le 1er point soit aligné horizontalement avec le dernier.*  
*Les coef. du polynôme sont générés dans le tableau  $coef$ , leurs sens est par exemple:  $1 +1x +3x^2 +2x^3$  ( $coef\_1$  est en sens inverse)*  
*Enfin cette procédure paramétrise la fonction si son degré = 3 ou 2 => B3Param EQM =  $statPoly = EQMpoly$*
- procedure **ParamB3**( $coefpoly$ :Mat1;  $Xdeb, Xfin$ :double) *Paramétrise une fonction de degré 3 ou 2 ou 1 sur l'intervalle [ $Xdeb Xfin$ ]*  
 *$coefpoly$  doit être dans le sens  $1 +1x +3x^2 +2x^3$ . La courbe B3Param est générée.*  
*NB: la paramétrisation d'une fonction de 2ème ou 1er degré est possible en construisant  $coefpoly$  comme par exemple :*  

$$\begin{matrix} 3 & -5x + 2x^2 + c0x^3 \\ 3 & -5x + c0x^2 + c0x^3 \end{matrix}$$
- procedure **Interpolation**( $xM, yM$ :coordM;  $N$ :integer) *interpolation de points par la méthode de Vandermonde.*  
*Le résultat est généré dans  $coef$  et  $coef\_1$*
- procedure **MatPass** *active les matrices de passages B3pass, B2pass et B1pass*
- function **DetMat**( $A$ :mat;  $N$ :integer) *renvoie le déterminant d'une matrice carrée A sa taille est  $N \times N$*
- procedure **MATsomme**( $A, B$ :mat;  $N, k$ :integer) *Somme de 2 matrices carrées, résultat dans Matsom si  $k=1 \Rightarrow A+B$  si  $k=-1 \Rightarrow A-B$*
- procedure **MATmul**( $A, B$ :mat;  $N$ :integer) *Multiplication de 2 matrices carrées, résultat dans Matprod*
- procedure **MATmulAB**( $A$ :mat;  $L1, C1$ :integer;  $B$ :mat;  $L2, C2$ :integer;)  *$A \times B$  résultat = MatprodAB de taille  $L1 \times C2$*   
 *$L1, C1$  est le nombre de Lignes et de Colonnes de la matrice A, pour B c'est  $L2, C2$  IMPORTANT  $L2$  doit être égal à  $C1$*
- procedure **Transpose**( $A$ :mat;  $L1, C1$ :integer) *Transpose la matrice A de taille  $L1, C1$ , résultat = Transmat de taille  $C1, L1$*
- procedure **InvMat**( $AA, BB$ :mat;  $N, M$ :integer) *résoud un système linéaire de matrices:  $AX = B$  par la méthode de Gauss-Jordan*  
 *$N \times N$  est la taille de la matrice AA, celle de BB peut être  $N \times M$  si  $M=1 \Rightarrow$  résolution d'un système linéaire «simple».*  
*Si  $M \neq 0$  la procédure calcule le résultat X dans MatX et le déterminant de AA dans DET*  
*Si  $M=0$  l'inverse de la matrice AA est calculé dans MatInv ainsi que DET de AA. Lancer la procédure comme ceci: InvMat(AA, AA, N, 0)*
- procedure **Affmat**( $A$ :mat;  $L1, C1$ :integer) *Affiche la matrice A de taille  $L1, C1$ , sur la console DOS*
- procedure **TraceB3**( $B3$ :pointBezier;  $Aff$ :integer) *Trace une B3 si  $Aff=1$  trace les normes P0P1 et P3P2, si 2 trace aussi 'Po' P1' P2' P3'*
- procedure **TraceB3M**( $B3$ :pointBezier;  $Mx, My$ :coordM;  $N, aff$ :integer) *Trace la B3 et les point M si  $Aff=1$  trace aussi P0P1 et P3P2*
- procedure **TraceB**( $B3bis$ :B3trace;  $DXgr, DYgr, aff$ :longint) *Nécessaire à Trace\_4B3 et Trace\_4B3M*
- procedure **Trace\_4B3**( $Ba, Bb, Bc, Bd$ :pointBezier;  $aff$ :integer) *Trace 4 B3 si  $aff=1$  trace les points de contacts entre les courbes*  
*si  $aff=2$  trace aussi les normes P0P1 P3P2*
- procedure **Trace\_4B3M**( $Ba, Bb, Bc, Bd$ :pointBezier;  $Mx, My$ :coordM;  $N, aff$ :integer) *Trace 4 B3 et les points M*  
*si  $aff=1$  trace les points de contacts entre les courbes si  $aff=2$  trace aussi les normes P0P1 P3P2*
- procedure **TraceB3etCercle**( $B3$ :pointBezier;  $xC, yC, Radius$ :double;  $sens, Aff$ :integer) *trace une clothoïde et son cercle*
- procedure **TraceRegCirc**( $xC, yC, Radius$ :double;  $Mx, My$ :coordM;  $N$ :integer) *trace une regression circulaire*