

Contexte : On considère une poutre longue (longueur L) de section rectangulaire (côté a, b , avec $a \ll b \ll L$), faite d'un matériau élastique de caractéristique : $(E, \nu, \lambda, \mu, J)$, avec E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson, λ, μ les modules élastiques de Lamé, et J le moment d'inertie de la poutre par rapport à l'axe $O\vec{x}_2$. La poutre est encastree au niveau de la section (S0) définie par la coordonnée $x_3 = 0$ et de centre le point O (voir figure24) et soumise à l'effort tranchant $T \vec{x}_1$ sur sa face de coordonnée $x_3 = L$.

En tout point (x_1, x_2, x_3) de la poutre, le tenseur de contraintes est donné par

$$\Sigma_{(x_1, x_2, x_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

avec $\sigma_{23} = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{T}{J} x_1 x_2, \sigma_{33} = \frac{T}{J} x_1 (x_3 - L)$.

Le champ de déplacement est donné par

$$\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{T}{2EJ} x_3^2 [L - \frac{x_3}{2}] \\ 0 \\ \frac{T}{EJ} [\frac{x_3^2}{2} - Lx_3] \end{pmatrix}$$

Rappel : Les contraintes principales $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ représentent les valeurs propres du tenseur des contraintes en un point donné. Par convention on utilisera la convention $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$. La contrainte σ_I correspond à la contrainte de traction maximale. Si $\sigma_{III} < 0$, elle correspond à la contrainte de compression maximale. La contrainte de cisaillement maximale peut être estimée par le critère de Tresca : $\sigma_T = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})$ ou par la contrainte de von Mises

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2}.$$

Objectif :

Il est demandé de :

- 1) Tracer une cartographie du champ de déplacement dans la poutre (i) dans le plan (x_1, x_2) pour les abscisses $x_3 = 0, \frac{l}{4}, \frac{l}{2}, \frac{3l}{4}, l$, et (ii) dans un plan de coupe (x_1, x_3) contenant le point O.
- 2) Calculer, en chaque point de la poutre, les contraintes principales.
- 3) Illustrer, sur l'évolution de la contrainte principale maximale sur la section $x_3 = 0$, l'effet d'une augmentation de l'amplitude T de l'effort tranchant.
- 4) Tracer une cartographie des critères de Tresca et de von Mises dans la poutre (i) dans le plan (x_1, x_2) pour les abscisses $x_3 = 0, \frac{l}{4}, \frac{l}{2}, \frac{3l}{4}, l$, et (ii) dans un plan de coupe (x_1, x_3) contenant le point O.