MARCHE ALÉATOIRE EN MILIEU ALÉATOIRE

Soit (A_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire A à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. Ces variables aléatoires définissent un environnement sur $\mathbb{Z}$. Pour un tirage (α_n) des variables aléatoires (A_n), on considère alors la marche aléatoire (X_n^α) définie par $X_0^\alpha = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1}^\alpha = X_n^\alpha + 1 | X_n^\alpha = k) = \alpha_k,$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1}^\alpha = X_n^\alpha - 1 | X_n^\alpha = k) = 1 - \alpha_k.$$

On se pose alors la question du comportement asymptotique de cette marche aléatoire. Dans ce but, on pose

$$\rho = \frac{1-A}{A} \qquad \text{et} \qquad \eta = \mathbb{E}[\log \rho].$$

Le comportement de la marche aléatoire est étroitement lié à la valeur de η. Dans la suite, on s'intéresse au cas particulier $\eta < 0$. Dans ce cas, on a

$$\lim_{n\to\infty} X_n^\alpha = +\infty \qquad \text{p.s.}$$

Plus précisement, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n^\alpha}{n} = \begin{cases} m & \text{si} \quad \mathbb{E}[\rho] < 1, \\ 0 & \text{si} \quad \mathbb{E}[\rho] \geqslant 1 \end{cases} \qquad \text{p.s.}$$

avec

$$m = \frac{1 - \mathbb{E}[\rho]}{1 + \mathbb{E}[\rho]}.$$

L'obtention d'un théorème limite central est plus compliquée que dans le cas classique. On introduit κ la constante telle que $\mathbb{E}[\rho^\kappa] = 1$. Si $\kappa > 2$, alors il existe une variance asymptotique $\sigma^2 > 0$ telle que

$$\sqrt{n}\Big(\frac{X_n^\alpha}{n} - m\Big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

On s'intéresse au cas particulier où $A(\Omega) = \{b, 1-b\}$ avec

$$\mathbb{P}(A = b) = a \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(A = 1-b) = 1-a$$

où $0 < a < 1$ et $1/2 < b < 1$.

1) Vérifier que

$$\eta = (1-2a)\log\Big(\frac{b}{1-b}\Big),$$
$$\mathbb{E}[\rho] = \frac{a(1-2b)+b^2}{b(1-b)} \qquad \text{et} \qquad m = \frac{(b-a)(1-2b)}{b+a-2b}.$$

2) En particulier, montrer que $\eta < 0$ si et seulement si $a > 1/2$.

3) Créer un code Python permettant de simuler la marche aléatoire en milieu aléatoire décrite ci-dessus et d'illustrer les lois fortes des grands nombres et la normalité asymptotique. On pourra éventuellement utiliser la fonction `solve` de Python pour trouver la valeur de κ.