DEVOIR

Mat-2900 : Mathématiques de l'ingénieur III — Automne 2017

A remettre vendredi le 1 décembre avant 16h00.

Note:

- On fera le devoir à l'aide du logiciel Matlab.
- Pour les questions qui n'exigent pas Matlab, on répondra dans un document manuscrit ou électronique.
- On remettra, sur le site du cours, le travail dans la boîte de dépôt prévue à cet effet. Vous devez déposer tous vos fichiers sous la forme d'un seul fichier compressé. De plus, on remettra si nécessaire une copie papier du travail comportant les réponses aux questions plus théoriques. Cette copie papier, sera placée dans une enveloppe sur laquelle figurera:
  - le no. du cours, le nom du professeur,
  - les noms et les numéros de dossier des membres de l'équipe,
  - l'enveloppe sera déposée dans une boîte au secrétariat du département de Mathématiques au local 1056 du Pavillon Vachon.

Partie A: calcul des coefficients de Fourier à l'aide de FFT

Dans de nombreuses applications, on ne peut pas utiliser l'approche vue en classe pour évaluer la série de Fourier d'un signal $f(x)$ périodique. En effet, l'expression de $f(x)$ peut être trop compliquée ou encore son expression analytique n'est pas connue. Pour cela, on doit utiliser la transformée discrète rapide de Fourier mieux connue sous le nom de Fast Fourier Transform (FFT). Par la suite, on supposera que le signal f est une fonction 2π périodique. Cette transformée est basée sur la forme complexe d'une série de Fourier :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx}$$

où

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_0}{2}, \\
c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2}, \qquad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots \\
c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2} = \bar{c}_k.
\end{aligned}
$$

Les coefficients c_k sont données par la formule

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$

Au lieu de calculer exactement ces intégrales, on les approche par une somme de Riemann

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\, e^{-ik\, x_j}\, \Delta x$$

basée sur les n noeuds également espacés $x_j = j\Delta x = j\dfrac{2\pi}{n}$ de l'intervalle $[0, 2\pi]$ avec $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Notons par $f_j = f(x_j)$ la valeur de f au noeud x_j et introduisons le nombre complexe $w = e^{-i\,\Delta x} = e^{-\frac{2\pi\, i}{n}}$. A l'aide de cette notation, il est facile de voir que

$$w^{k\, j} = e^{(-i\,\Delta x)kj} = e^{-ik\, x_j}.$$

Par conséquent, la formule approchée pour les c_k s'écrit

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\, e^{-ik\, x_j}\, \Delta x = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} w^{k\, j} f(x_j), \tag{1}$$

ce qui correspond à une multiplication matricielle

$$\vec{c} = \frac{1}{n}\, \mathcal{F}\, \vec{f}.$$

En général, le nombre d'opérations pour effectuer un produit matriciel est de l'ordre de $O(n^2)$. En 1965, Tuckey et Cooley propose un algorithme qui va révolutionner le sujet. Il s'agit de la transformée discrète rapide de Fourier ou FFT. Le nombre d'opérations de cet algorithme est réduit à $O(n\, \log n)$ d'opérations ce qui est remarquable.

Commandes Matlab :

- $c = fft\,(f)/n$ où f est le vecteur des valeurs nodales de f.

- partie réelle de $c = a + ib$: $real(c)$
- partie imaginaire de $c = a + ib$: $imag(c)$

1. Si on prend la formule approchée (1), montrer que $c_{n-k} = \bar{c}_k$ pour tous les $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$. Autrement dit, si n est pair, il suffit de calculer seulement la moitié des coefficients.

2. (a) Calculer les coefficients a_k, b_k de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par
$$f(x) = x, \qquad \text{pour } 0 \leq x \leq 2\pi,$$
par la méthode vue au cours.

   (b) Appliquer l'algorithme FFT au problème a) pour calculer numériquement les 10 premières valeurs des coefficients de Fourier. On prendra $n = 2^{10}$. Comparer les valeurs exactes et celles fournies par FFT. Evaluer l'erreur maximale.

   (c) Refaire la sous-question b) en prenant $n = 2^{16}$. Comment se comporte l'erreur.

3. Appliquer l'algorithme FFT avec $n = 2^{16}$ pour calculer numériquement les 10 premières valeurs des coefficients de Fourier de la fonction
$$f(x) = e^{-\pi\,(x-\pi)^2} \qquad \text{pour } 0 \leq x \leq 2\pi.$$
Représenter graphiquement les valeurs de a_k et b_k en fonction de k.

Partie B: résolution de l'équation des cordes vibrantes dans une barre

L'objectif est de résoudre de manière analytique et numérique l'équation des cordes vibrantes ou l'équation des ondes dans une barre. Dans ce qui suit, on va se limiter au problème où la corde est fixée aux deux extrémités et que la vitesse initiale de la corde est nulle. Ainsi, le problème aux limites s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & = & c^2\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,t) & = & 0, \\ u(1,t) & = & 0, \\ u(x,0) & = & h(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

où c est la vitesse de l'onde et $h(x)$ est la solution initiale au temps $t = 0$.

On discrétise la barre $[0,1]$ de manière uniforme

$$0 = x_0 < x_1 < x_2, \ldots < x_m < x_{m+1} = 1$$

où les noeuds sont donnés par $x_i = ih$ pour $i = 0, 1, 2, , \ldots, m+1$ et $h = \dfrac{1}{m+1}$.

De plus, on discrétise le temps en ne considérant la solution $u(x,t)$ seulement aux temps $t = t_n = n\,\Delta t$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Le but est d'obtenir une valeur approchée de la solution $u(x,t)$ aux noeuds de calcul (x_i, t_n). On notera l'approximation par

$$u_i^{(n)} \approx u(x_i, t_n).$$

Le principe de la méthode des différences finies consiste à approcher les dérivées par des schémas de différences finies

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n) & \approx & \dfrac{u_i^{(n+1)} - 2u_i^{(n)} + u_i^{(n-1)}}{\Delta t^2}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) & \approx & \dfrac{u_{i-1}^{(n)} - 2u_i^{(n)} + u_{i+1}^{(n)}}{h^2}. \end{array}$$

On applique ces schémas de différences finies à l'équation (2) aux noeuds de calcul (x_i, t_n). Ceci conduit au schéma numérique suivant, pour $n \geq 1$,

Schéma numérique pour l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{u_i^{(n+1)} - 2u_i^{(n)} + u_i^{(n-1)}}{\Delta t^2} = c^2 \left(\frac{u_{i-1}^{(n)} - 2u_i^{(n)} + u_{i+1}^{(n)}}{h^2} \right) \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (3)$$

Pour démarrer l'algorithme, nous avons besoin des $u_i^{(0)}$ et des $u_i^{(1)}$. Au temps $t = 0$, on connait déjà la solution. Ainsi on posera

$$u_i^{(0)} = h(x_i) \qquad \text{pour } i = 1, 2, , \ldots, m\ .$$

Pour calculer $u_i^{(1)}$, on introduit un temps fictif $t_{-1} = 0 - \Delta t$ et on se sert du fait que la dérivée $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ est nulle

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) \approx \frac{u_i^{(1)} - u_i^{(-1)}}{2\Delta t} \qquad \Longrightarrow \qquad u_i^{(1)} = u_i^{(-1)}.$$

On reporte cela dans le schéma (3) en prenant $n = 0$ ce qui conduit à la formule

$$\frac{u_i^{(1)} - 2u_i^{(0)} + u_i^{(1)}}{\Delta t^2} = c^2 \left(\frac{u_{i-1}^{(0)} - 2u_i^{(0)} + u_{i+1}^{(0)}}{h^2} \right) \qquad \text{pour } i = 1, 2, , \ldots, m.$$

Par la suite, on utilisera les notation suivantes. La solution au temps t_n sera notée par le vecteur

$$\vec{u}_n = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \ldots, u_m^{(n)})$$

et on considère la matrice carrée d'ordre m

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. (a) Appliquer la méthode de séparation de variables afin d'obtenir la solution de l'équation de cordes vibrantes

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(c\, k\, \pi t)\ \sin k\pi x$$

Indiquer comment obtenir les coefficients b_k à l'aide du développement de Fourier en sinus de la fonction $h(x)$.

(b) Pour $c = 1$, déterminer la solution exacte de l'équation des cordes vibrantes pour $h(x) = 2\sin \pi x + \sin 3\pi x$.

2. Montrer que le schéma (3) peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{cases} \vec{u}_1 & = \left(I + \dfrac{\alpha}{2}\, A\right) \vec{u}_0, \\ \vec{u}_{n+1} & = (2\, I + \alpha\, A)\, \vec{u}_n - \vec{u}_{n-1} \qquad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

où $\alpha = \dfrac{(\Delta t\ c)^2}{h^2}$ et I est la matrice identité d'ordre m.

3. (a) Appliquer le schéma de la sous-question 2 pour calculer numériquement la solution du problème de la question 1 b). On prendra $m = 49$, $h = \Delta t$ et $0 \leq t \leq 2$. On affichera les graphes des solutions $u(x,t)$ correspondant à 8 temps $\{t_0, t_1, \ldots, t_7\}$ différents incluant les temps $t_0 = 0$ et $t_7 = 2$ et à intervalle régulier le plus possible. De plus, on évaluera l'erreur sur chaque pas de temps où l'erreur est donnée par la formule

$$err(n) = \max_i |u_i^{(n)} - u(x_i, t_n)|$$

Commenter vos résultats.

(b) Refaire a) pour une valeur de $\Delta t < h$ On prendra $\Delta t = 0.9\, h$. Comparer les erreurs avec celles de a).

(c) Refaire a) pour une valeur de $\Delta t > h$ On prendra $\Delta t = 1.1\, h$. Comparer les erreurs avec celles de a).

4. Résoudre numériquement le problème de la corde vibrante avec la solution initiale

$$h(x) = e^{-400\, (x-0.5)^2}.$$

On prendra $m = 49$, $h = \Delta t$. Créer une animation de la solution $u(x,t)$ pour $0 \leq t \leq 2$. Commenter vos résultats.