Algèbre
Semestre 3
S. Iovleff

Méthodes Gauss et de Jordan

1 Description générale

Pour résoudre le système $Ax = b$, où A est une matrice quelconque, on cherche à se ramener à un système plus simple que l'on sait résoudre.

La méthode de Gauss consite à se ramener à un système triangulaire tandis que la méthode de Jordan consiste à se ramener à un système diagonal.

Pour transformer le système initial en un système triangulaire ou diagonal, il faut faire des combinaisons des lignes. Pour obtenir un bon résultat numérique, on pourra être amené à faire des permutations des lignes et éventuellement des colonnes du système.

2 Méthode de Gauss

La méthode de Gauss est itérative. On démarre avec la matrice $A = A^{(0)}$, le vecteur $b = b^{(0)}$ et on construit successivement la séquence de matrices et vecteurs

$$(A^{(0)}, b^{(0)}) \to (A^{(1)}, b^{(1)}) \to (A^{(2)}, b^{(2)}) \to \ldots \to (A^{(n)}, b^{(n)})$$

où après l'itération i, la matrice $A^{(i)}$ aura la forme

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc}
a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} & \ldots & a_{1i}^{(i)} & a_{1,i+1}^{(i)} & \ldots & & a_{1,n-1}^{(i)} & a_{1n}^{(i)} \\
0 & a_{22}^{(i)} & \ldots & a_{2i}^{(i)} & a_{2,i+1}^{(i)} & \ldots & & a_{2,n-1}^{(i)} & a_{2n}^{(i)} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & a_{ii}^{(i)} & a_{i,i+1}^{(i)} & \ldots & & a_{i,n-1}^{(i)} & a_{in}^{(i)} \\
\hline
0 & 0 & \ldots & 0 & a_{i+1,i+1}^{(i)} & \ldots & & a_{i+1,n-1}^{(i)} & a_{i+1,n}^{(i)} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1,i+1}^{(i)} & \ldots & & a_{n-1,n-1}^{(i)} & a_{n-1,n}^{(i)} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n,i+1}^{(i)} & \ldots & & a_{n,n-1}^{(i)} & a_{nn}^{(i)}
\end{array}\right)$$

Pour passer de la matrice $A^{(i)}$ à la matrice $A^{(i+1)}$, il faut faire apparaître des 0 colonne $i+1$. Pour cela on fait des combinaisons de lignes de la forme

$$L_j \leftarrow L_j - \frac{a_{i+1,j}^{(i)}}{a_{i+1,i+1}^{(i)}} L_{i+1}, \quad j > i+1.$$

Dans cette expression L_j représente la ligne j de la matrice $A^{(i)}$. Le nombre $a_{i+1,i+1}^{(i)}$ est appelé le pivot de Gauss. Les mêmes combinaisons doivent être appliquées simultanément au second membre du système, c'est à dire au vecteur b.

3 Algorithme

On en déduit un premier algorithme

Algorithm 1 Algorithme de réduction d'un système quelconque à un système triangulaire supérieur

Input: a une matrice (n, n) et b un vecteur de taille n
Output: a une matrice triangulaire supérieure et le second membre b

```
for i = 1 to n do /* i représente le numéro de la colonne courante */
  p ← a(i,i) /* p contient le pivot courant */
  for j = i+1 to n do /* j représente le numéro de la ligne courante */
    c ← a(j,i)/p /* coefficient multiplicateur */
    for k = i+1 to n do /* applique la rotation à partir de la colonne i+1 */
      a(j,k) ← a(j,k) − c ∗ a(i,k) /* rotation ligne j, colonne k */
    end for
    b(j) ← b(j) − c ∗ b(i) /* applique la rotation au second membre */
  end for
end for
```

En l'état cet algorithme n'est pas utilisable car il ne teste pas si p est nul. Par ailleurs si p est petit, c sera très grand, et le calcul en précision finie d'un ordinateur fera que l'on va accumuler des erreurs d'arrondis.

4 Stratégies pour le choix du pivot

Il existe trois stratégies pour choisir le pivot : de la plus économique en temps de calcul à la plus robuste en terme d'erreurs numériques. Ses stratégies sont basées sur la proposition suivante :

Proposition .1 *Soit $Ax = b$ un système. Si on échange les lignes i et j de A et de b alors on ne change pas la solution. Si on échange les colonnes k et l de A alors la solution du nouveau système est la même que celle du système originel avec x_k et x_l échangés.*

1. La stratégie la plus rapide consiste, à l'itération i, à rechercher dans la colonne i le premier élément non nul. En particulier si $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$, il n'y a rien à faire.
2. La deuxième stratégie consiste à rechercher dans la colonne i le plus grand élément et à le choisir comme pivot.
3. La troisième stratégie consiste à rechercher dans la sous-matrice A^{II} avec $I = i, \ldots, n$ le plus grand élément et à le choisir comme pivot.

On remarquera que pour les deux premières stratégie on peut être amené à effectuer des permutations de lignes alors que pour la troisième, on peut être amené à effectuer des permutions de lignes et de colonnes.
Attention : le pivot doit nécessairement se trouver dans la partie inférieure de A.

5 La méthode de Jordan

La méthode de Jordan est identique à la méthode de Gauss, la seule différence étant dans les rotations s'appliquent aussi à la partie supérieure de la matrice pour faire apparaître une matrice diagonale.