Projet MCI

Transfert de chaleur

La diffusion de la chaleur dans un milieu continu solide peut se modéliser par l'équation aux dérivées partielles (1).

Pour simplifier l'expression nous supposerons que le milieu dans lequel se diffuse la chaleur est une barre de longueur L et nous traiterons donc un problème unidimensionnel en espace. On note t la variable de temps et x la variable d'espace. $T(x,t)$ est la température au point x et au temps t. L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = s(x,t) \;\; \forall x \in [0,L] \text{ et } \forall t \in [0,t_f] \qquad (1)$$

où ρ est la masse spécifique, c est la chaleur spécifique de la barre. $s(x,t)$ est la source de chaleur. La solution de cette équation dépend des conditions initiales et aux limites. Par la suite, nous supposerons qu'à $t = 0$ la température de la barre était uniforme $T(x,0) = 20\,°\text{C}$. On impose la température $T(0,t) = 50\,°\text{C}$ à l'extrémité $x = 0$ de la barre et $T(L,t) = 30\,°\text{C}$ à l'extrémité $x = L$.

L'objectif du projet est de résoudre cette équation en utilisant la méthode des différences finies.

I) Problème stationnaire

Dans cette partie, on suppose que la masse spécifique est négligeable, ce qui veut dire que l'équation (1) se réduit à

$$-k \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = s(x) \;\; \forall x \in [0,L] \qquad (2)$$

Notons que, dans ce cas, le temps n'intervient pas. Nous avons à résoudre une équation différentielle ordinaire d'ordre 2.

1) Déterminer la solution analytique lorsque la source $s(x)$ est nulle.
2) En utilisant la méthode matricielle vue en cours déterminer, à l'aide d'un programme Matlab, la solution numérique.
3) Comparer les résultats.

II) Problème transitoire

Dans cette partie, on va résoudre de manière approchée l'équation (1). Pour cela, on pose $T_{i,j} = T(x_i, t_j)$

On note dt le pas de temps et dx le pas d'espace. On approche la dérivée par rapport au temps par méthode d'Euler

$$\frac{\partial T(x_i,t_j)}{\partial t} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{dt}$$

On approche la dérivée seconde par rapport à x par une méthode de différences centrées

$$\frac{\partial^2 T(x_i,t_j)}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{dx^2}$$

1) Méthode explicite

En supposant que la source de chaleur est nulle, l'équation (1) devient :

$$\rho c \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{dt} - k \frac{T_{i+1,j-1} - 2T_{i,j-1} + T_{i-1,j-1}}{dx^2} = 0 \qquad \forall i,j$$

ce qui se réécrit :

$$T_{i,j} = T_{i,j-1} + \frac{kdt}{\rho c dx^2}(T_{i+1,j-1} - 2T_{i,j-1} + T_{i-1,j-1}) \qquad \forall i,j$$

A l'aide d'un programme Matlab, déterminer les valeurs de la température au temps t_j connaissant les valeurs au temps t_{j-1}.

2) Méthode implicite

En supposant que la source de chaleur est nulle, l'équation (1) devient :

$$\rho c \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{dt} - k \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{dx^2} = 0 \quad \forall i,j$$

a) Mettre le système d'équations ci-dessus sous la forme matricielle suivante

$AT_j = b_{j-1}$ où $T_j = \begin{pmatrix} T_{1,j} \\ T_{2,j} \\ . \\ . \\ . \\ T_{n,j} \end{pmatrix}$ et n est le nombre total de pas d'espace.

b) A chaque pas de temps t_j, déterminer la température T_j.

c) Tracer l'évolution sur tout l'intervalle de temps $[0, t_f]$.

d) Comparer les résultats explicites et implicites