

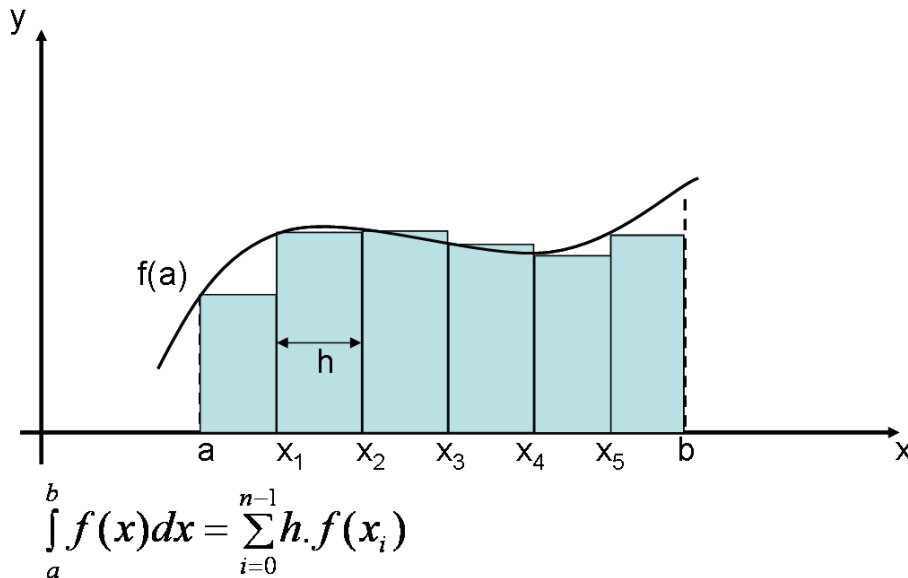
14 Intégrale d'une fonction

Vous allez écrire un programme permettant de calculer l'intégrale d'une fonction. Trois méthodes simples d'intégration seront comparées.

Méthode des rectangles

La première méthode, appelée "méthode des rectangles" consiste à approximer l'aire sous une courbe par une somme d'aires de rectangles de largeur égale (figure 1).

FIGURE 1 – Méthode des rectangles



$$x_i = a + ih$$

$$x_0 = a$$

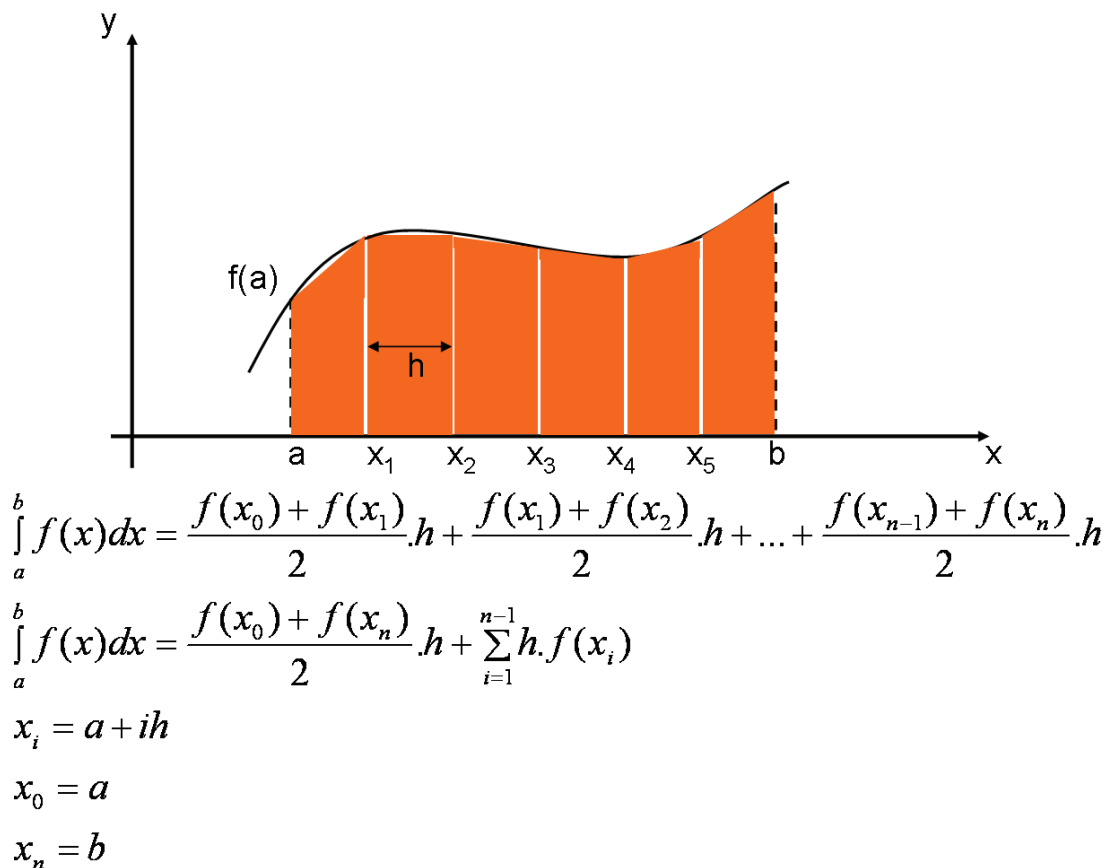
$$x_n = b$$

On peut constater que cette méthode sera d'autant plus précise que le pas d'intégration diminue et que la fonction varie lentement.

Méthode des trapèzes

La deuxième méthode consiste à approximer l'aire sous une courbe par une somme d'aires de trapèzes de hauteur égale à h (figure 4).

FIGURE 2 – Méthode des trapèzes



Méthode de Simpson

Si la méthode des trapèzes est basée sur une interpolation linéaire entre les points considérés, la méthode de Simpson est basée sur une interpolation parabolique. On peut montrer que dans ce cas, l'aire sous la courbe peut être approximée par (figure 3)

FIGURE 3 – Méthode de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(x_n) \right]$$

$$x_i = a + ih$$

$$x_0 = a$$

$$x_n = b$$

Programme à réaliser

Première partie

Ecrire un programme permettant de calculer l'intégrale de $\sin(x)$ sur un intervalle contenu dans $[-6\pi, 6\pi]$ et choisi par l'utilisateur. Les bornes de l'intervalle seront contenues dans un fichier d'entrée nommé `input.txt` que l'utilisateur pourra éditer avant utilisation du programme. Ce fichier contiendra également le pas d'intégration. Votre programme calculera, après lecture du fichier d'entrée, l'intégrale demandée par la méthode des rectangles, la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson en indiquant clairement à l'utilisateur les étapes en cours. Les valeurs calculées seront affichées à l'écran et également stockées dans un fichier.

Deuxième partie

Pour comparer de façon plus précise les deux méthodes d'intégration utilisées, calculer l'intégrale de $\sin(x)$ entre 0 et π . Votre programme sera réécrit pour qu'il adapte le pas d'intégration de sorte que la différence absolue entre la valeur obtenue par chacune des trois méthodes et la valeur exacte soit de 10^{-6} . Vous noterez à l'écran ainsi que dans un fichier, le pas d'intégration utilisé pour atteindre cette précision.