18 Série de Fourier

Toute fonction $f(x)$ L-périodique, continue et dérivable par morceaux, peut être décomposée en série de Fourier, qui consiste en une somme de termes dépendant de la fréquence fondamentale de la fonction et de ses harmoniques. La définition de la série de Fourier de $f(x)$, pour une fonction à valeurs réelles, est

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi}{L} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{L} nx\right) \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\; dx \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{L} nx\right) dx \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{L} nx\right) dx \end{aligned}$$

Le coefficient a_0 représente la valeur moyenne de la fonction $f(x)$.

Exercice

Étudier la représentation d'une onde carrée de période L définie par

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad 0 < x < \frac{L}{2} \\ -1 & \text{si} \quad \frac{L}{2} < x < L \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \text{ ou } x = \frac{L}{2} \end{cases}$$

Sur l'intervalle $[0, L[$, la fonction peut être définie de manière discrète sur 100 points. Réaliser un programme qui devra

1. calculer, par la méthode d'intégration de Simpson, les coefficients de Fourier nécessaires à la décomposition de $f(x)$ et proposer de les afficher ;
2. calculer le développement de Fourier de $f(x)$;
3. tracer le graphe de la fonction et de sa série de Fourier sur trois périodes pour une somme d'harmoniques laissée au choix de l'utilisateur.

Les coefficients dont on sait directement qu'ils sont théoriquement nuls seront calculés pour vérification mais ne seront pas utilisés dans le calcul de la série.